

تعداد سوالات: تستی: ۲۵ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: یک ۱

عنوان درس: احتمال ۲

رشته تحصیلی/کد درس: آمار و کاربردها، ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۷۱۵۴

استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است

۱- در تابع چگالی زیر، مقدار  $a$  را محاسبه کنید؟

$$f(x, y) = ax^2y, 0 < x, y < 1$$

۱. ۱      ۲.  $\frac{1}{6}$       ۳. ۶      ۴. ۰

۲- فرض کنید  $f(x, y) = \begin{cases} x+y & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$  در این صورت احتمال زیر برابر است با؟

$$p\left(\frac{1}{2} \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{1}{2}\right)$$

۱. ۱      ۲.  $\frac{1}{4}$       ۳.  $\frac{1}{2}$       ۴. ۰

۳- در توزیع پیوسته  $f(x, y)$ ، توزیع حاشیه ای  $f_Y(y)$  کدام است؟

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \quad .1$$

$$f_Y(y) = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \quad .2$$

$$f_Y(y) = \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx \quad .3$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx \quad .4$$

۴- فرض کنید تابع توزیع توام، به صورت  $F(x, y) = (1 - e^{-x^2})(1 - e^{-y})$ ،  $x, y > 0$  باشد. تابع چگالی توام را بیابید؟

$$f(x, y) = 2xe^{-y^2-x} \quad .1 \quad f(x, y) = 2xe^{x^2-y} \quad .2 \quad f(x, y) = 2xe^{-x^2-y} \quad .3 \quad f(x, y) = 2xe^{y^2-x} \quad .4$$

۵- گزینه درست کدام است؟

$$F_Y(y|x) = \frac{1}{f_X(x)} \int_{-\infty}^y f(x, y) dy \quad .1$$

$$F_Y(y|x) = \frac{1}{f_Y(y)} \int_{-\infty}^y f(x, y) dx \quad .2$$

$$F_Y(y|x) = \frac{1}{f_X(x)} \int_{-\infty}^y f(x, y) dx \quad .3$$

$$F_Y(y|x) = \frac{1}{f_Y(y)} \int_{-\infty}^y f(x, y) dy \quad .4$$

تعداد سوالات: تستی: ۲۵ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: احتمال ۲

رشته تحصیلی/کد درس: آمار و کاربردها، ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۷۱۵۴

۶- در گشتاورهای یک زوج متغیر تصادفی، تعریف میانگین  $Y$  در کدام گزینه قرار دارد؟

۱. مشتق  $\varphi(t_1, t_2)$  نسبت به  $t_1$  با قرار دادن  $t_1 = t_2 = 0$

۲. مشتق  $\varphi(t_1, t_2)$  نسبت به  $t_1$  با قرار دادن  $t_2 = 0$

۳. مشتق  $\varphi(t_1, t_2)$  نسبت به  $t_2$  با قرار دادن  $t_1 = t_2 = 0$

۴. مشتق  $\varphi(t_1, t_2)$  نسبت به  $t_2$  با قرار دادن  $t_1 = 0$

۷- کدام گزینه، تعریف  $E(X)$  می باشد؟

۱.  $E[EX(X|Y)]$  ۲.  $E[EY(Y|X)]$  ۳.  $E[E(X|Y)]$  ۴.  $E[E(Y|X)]$

۸- تابع چگالی توام زوج  $(X, Y)$  به ازای  $x, y > 0$  به صورت  $f(x, y) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}$  می باشد. تابع چگالی  $Z = X + Y$  را بیابید؟

۱.  $\Gamma(2, 1/\lambda)$

۲. نمایی با پارامتر ۲

۳.  $\chi_2^2$

۴. فیشر با پارامترهای ۱ و ۲

۹- فرض کنید تعداد لامپ های معیوب یک فرایند تولید در طول یک هفته، متغیری تصادفی با میانگین ۱۵۰ است. حدود احتمال این که تولید لامپ های معیوب در یک هفته از ۲۰۰ تا تجاوز کند، چقدر است؟

۱. حداکثر ۷۵ درصد ۲. حداقل ۲۵ درصد ۳. حداکثر ۲۵ درصد ۴. حداقل ۷۵ درصد

۱۰- اگر  $Var(X) = 0$  باشد،  $P(X = E(X))$  کدام است؟

۱. ۰/۵ ۲. ۰/۲۵ ۳. ۱ ۴. صفر

۱۱- اگر متغیر تصادفی  $X$  فقط مقادیر نامنفی اختیار کند، آن گاه به ازای هر مقدار  $a > 0$  گزینه درست را بیابید؟

۱.  $P(X \leq a) \geq \frac{E(X)}{a}$  ۲.  $P(X \leq a) \geq 1 - \frac{E(X)}{a}$

۳.  $P(X \geq a) \leq 1 - \frac{E(X)}{a}$  ۴.  $P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$

۱۲- فرض کنید  $X$  متغیر تصادفی با توزیع نرمال استاندارد باشد. توزیع  $\chi^2$  کدام است؟

۱. کی دو با یک درجه آزادی ۲. گاما با پارامترهای ۱ و ۲

۳. کی دو با دو درجه آزادی ۴. گاما با پارامترهای ۱ و ۲

تعداد سوالات: تستی: ۲۵ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: احتمال ۲

رشته تحصیلی/کد درس: آمار و کاربردها، ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۷۱۵۴

۱۳- فرض نمایید  $X_1, X_2$  دو متغیر از توزیع نرمال استاندارد باشند، قرار دهید  $Y_1 = x_1 + x_2$  و  $Y_2 = \frac{x_1}{x_2}$  در این صورت

ژاکوبی تبدیل برابر است با؟

$$1. \frac{-y_1}{(1+Y_2)^2} \quad 2. \frac{-y_2}{(1+Y_2)^2} \quad 3. \frac{-y_2}{(1+Y_2)^2} \quad 4. \frac{-y_2}{(1+Y_1)^2}$$

۱۴- فرض کنید که طول عمر لامپ معینی دارای توزیع نمایی با میانگین ۱۰۰ ساعت باشد. اگر ۱۰ لامپ از این نوع را هم زمان نصب کنیم، میانگین طول عمر لامپی که زودتر از همه می سوزد را بیابید؟

$$1. 100 \quad 2. 10 \quad 3. 10 \quad 4. 0.1$$

۱۵- فرض کنید که تاسی را یک بار می ریزیم و اگر عدد روی تاس  $X$  باشد، جایزه ای برابر  $Y = (X - 2)^2$  دریافت می کنیم. تابع چگالی  $Y$  در نقطه صفر را بیابید؟

$$1. \frac{2}{6} \quad 2. \frac{4}{6} \quad 3. \frac{1}{6} \quad 4. \frac{3}{6}$$

۱۶- فرض کنید که  $X$  دارای توزیع  $f_X(x) = \theta x^{-\theta-1} I_{[1,\infty)}(x)$ ،  $\theta > 0$  باشد. توزیع  $Y = \log X$  کدام است؟

$$1. \text{بتا} \quad 2. \text{پارتو} \quad 3. \text{نمایی} \quad 4. \text{لگ نرمال}$$

۱۷- اگر  $X$  یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع توزیع  $F_X$  و با تابع چگالی پیوسته  $f_X$  باشد. توزیع  $U = F_X(X)$  کدام است؟

$$1. \text{یکنواخت صفر و یک} \quad 2. \text{کی دو با درجه آزادی یک}$$

$$3. \text{یکنواخت یک و دو} \quad 4. \text{نرمال استاندارد}$$

۱۸- فرض کنید  $X_1, X_2, \dots, X_n$  متغیرهای تصادفی مستقل برنولی باشند. توزیع  $Y = \sum_{i=1}^n X_i$  کدام است؟

$$1. \text{دوجمله ای منفی} \quad 2. \text{هندسی} \quad 3. \text{فوق هندسی} \quad 4. \text{دوجمله ای}$$

۱۹- اگر  $X_1, X_2, \dots, X_n$  متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیعی با توزیع نمایی باشند. توزیع  $Y = \sum_{i=1}^n X_i$  را بیابید؟

$$1. \text{نرمال} \quad 2. \text{گاما}$$

$$3. \text{لگ نرمال} \quad 4. \text{کی دو با } n \text{ درجه آزادی}$$

تعداد سوالات: تستی: ۲۵ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: احتمال ۲

رشته تحصیلی/کد درس: آمار و کاربردها، ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۷۱۵۴

۲۰- اگر متغیر تصادفی  $X$  دارای توزیع  $f_X(x) = x^{-2}I_{(1,\infty)}(x)$  باشد، مقدار  $E(X)$  را به دست آورید؟

۱. صفر      ۲. یک      ۳. دو      ۴. وجود ندارد.

۲۱- اگر میانگین یک نمونه تصادفی مانند  $X_1, X_2, \dots, X_n$  از توزیعی باشد که تابع چگالی آن به صورت  $f_X(x) = I_{(0,1)}(x)$  است، مقدار  $M_{\bar{X}_n}(t)$  در نقطه  $t=0$  چقدر است؟

۱. ۱      ۲. ۰/۵      ۳. ۲      ۴. صفر

۲۲- اندازه نمونه چقدر باشد تا ۹۹ درصد مطمئن شویم که  $\bar{X}_n$  در فاصله  $0/5\sigma$  از  $\mu$  است؟

۱. ۸۰      ۲. ۴۰۰      ۳. ۴۰      ۴. ۸۰۰

۲۳- گوییم دنباله  $\{X_n\}$  از متغیرهای تصادفی در میانگین مرتبه دوم به متغیر تصادفی  $X$  همگراست هرگاه:

۱. وقتی  $n \rightarrow \infty$   $\lim E[(\bar{X}_n - X)^2] \neq 0$       ۲. وقتی  $n \rightarrow \infty$   $\lim E[(X_n - X)^2] = 0$
۳. وقتی  $n \rightarrow \infty$   $\lim E[(\bar{X}_n - X)^2] \neq 0$       ۴. وقتی  $n \rightarrow \infty$   $\lim E[(X_n - X)^2] = 0$

۲۴- اگر  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  یک نمونه تصادفی از جامعه نرمال استاندارد باشد، گزینه درست کدام است؟

۱.  $\bar{Z}$  دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس  $\frac{1}{n}$  است.

۲.  $\bar{Z}$  و  $\sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})^2$  مستقل اند.

۳.  $\sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})^2$  دارای توزیع  $\chi^2$  با  $n-1$  درجه آزادی است.

۴. همه موارد

۲۵- فرض شود  $X$  دارای توزیع  $F$  با  $n$  و  $4$  درجه آزادی باشد،  $E(X)$  کدام است؟

۱. برای  $n > 4$   $E(X) = \frac{n}{n-4}$       ۲. برای  $n > 4$   $E(X) = \frac{n}{n+4}$

۳. برای  $n > 2$   $E(X) = \frac{n}{n-2}$       ۴. برای  $n > 2$   $E(X) = \frac{n}{n+2}$

تعداد سوالات: تستی: ۲۵ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱: یک

عنوان درس: احتمال ۲

رشته تحصیلی/کد درس: آمار و کاربردها، ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۷۱۵۴

## سوالات تشریحی

- ۱- تابع چگالی توام  $(X, Y)$  به صورت  $f(x, y) = 12xy(1-y)$   $0 < x, y < 1$  است. استقلال دو متغیر را بررسی نمایید. ۱.۵۰ نمره
- ۲- تابع چگالی توام  $X$  و  $Y$  به صورت  $f(x, y) = \frac{1}{y}$   $0 < x < y < 1$  می باشد. احتمال آن که مقدار  $X + Y$  از  $\frac{1}{2}$  بزرگ تر باشد، چقدر است؟ ۲.۰۰ نمره
- ۳- قانون ضعیف اعداد بزرگ را بیان و اثبات نمایید؟ ۱.۵۰ نمره
- ۴- فرض کنید که  $X$  توزیع بتا با پارامترهای  $a$  و  $b = 1$  داشته باشد. توزیع  $Y = -\log X$  را به دست آورید(نام توزیع جدید را بنویسید)؟ ۰.۵۰ نمره
- ۵- اگر  $Y_1, \dots, Y_4$  آماره های ترتیبی نمونه ای تصادفی به اندازه ۴ از جامعه ای با تابع چگالی  $f(x) = 2xI_{(0,1)}(x)$  باشند. تابع چگالی  $Y_3$  را به دست آورید؟ ۱.۵۰ نمره