

سری سوال: یک ۱

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

عنوان درس: آنالیز ریاضی، آنالیز ریاضی ۳

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (کاربردی)، ریاضی (محض) ۱۱۱۱۰۴۶ -، ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۴۳۲

$$-1 \quad f(x, y) = \begin{cases} \left( \frac{xy^2}{x^2 + y^2}, \frac{x^3 \sin y}{x^2 + y^2}, \frac{y^3}{x^2 + y^2} \right) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{تابع } f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ با ضابطه}$$

روی  $\mathbb{R}^3$ ۱. با نرم  $\|\cdot\|_\infty$  پیوسته و با نرم  $\|\cdot\|_2$  ناپیوسته است.۲. با هر دو نرم  $\|\cdot\|_\infty$  و  $\|\cdot\|_2$  پیوسته است.۳. با نرم  $\|\cdot\|_2$  پیوسته و با نرم  $\|\cdot\|_\infty$  ناپیوسته است.۴. با نرم  $\|\cdot\|_2$  پیوسته و با نرم  $\|\cdot\|_\infty$  فقط در  $(0, 0)$  پیوسته است.۲- اگر  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  و باز و تابع  $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  در  $x \in D$  مشتق پذیر باشد آنگاه۱.  $f' \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  ۲.  $f'(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ۳.  $\forall h \in \mathbb{R}^n \quad f'(x)(h) \in \mathbb{R}^m$  ۴.  $f': D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ۳- اگر  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  و باز و  $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  در  $x \in D$  مشتق پذیر و  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$  به ترتیب پایه برای  $\mathbb{R}^m$  و  $\mathbb{R}^n$  باشد آنگاه۱.  $f'(x)e_j$  سطر  $j$ ام  $[f'(x)]$  می باشد.۲.  $D_j f_i(x)$  درایه  $(j, i)$ ام ماتریس  $[f'(x)]$  می باشد.۳.  $[f'(x)]$  یک ماتریس  $n \times m$  می باشد

$$f'(x)e_j = \sum_{i=1}^m (D_j f_i)(x)u_i \quad .4$$

۴- اگر  $f$  تابع حقیقی روی مجموعه باز  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  باشد بطوریکه تمام مشتقات جزئی  $f$  روی  $D$  کراندار باشد آنگاه۱.  $f$  روی  $D$  پیوسته است. ۲.  $f'$  روی  $D$  پیوسته است.۳.  $f$  روی  $D$  کراندار است. ۴. تمام مشتقات جزئی  $f$  روی  $D$  پیوسته است.

سری سوال: ۱ یک

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

عنوان درس: آنالیز ریاضی، آنالیز ریاضی ۳

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (کاربردی)، ریاضی (محض) ۱۱۱۰۴۶ -، ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۴۳۲

۵- اگر  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  و باز و تابع  $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  در  $x \in D$  مشتق پذیر و تابع  $g$  مجموعه باز شامل  $f(D)$  را بنویس  $\mathbb{R}^k$  نگاشته و در  $f(x)$  نیز پیوسته باشد در این صورت کدام گزینه در مورد  $F(x) = g(f(x))$  نادرست است؟

۲. حاصلضرب دو تبدیل خطی است.

۱.  $F'(x) \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$ ۴.  $F'(x) = g'(f(x))f'(x)$ 

۳. حاصلضرب دو ماتریس است.

۶- کدام قضیه زیر گواهی بر تشابه رفتار هر نگاشت بطور پیوسته مشتق پذیر تابع  $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  در مجاورت نقطه  $x \in D$  با رفتار تبدیل خطی  $f'(x)$  می باشد؟

۴. رتبه

۳. تابع معکوس

۲. تابع ضمنی

۱. مقدار میانگین

۷- اگر  $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  یک تابع دو خطی باشد آنگاه برای هر  $(x, y)$  و  $(h, k)$  از  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  ضابطه  $(Df(x, y))(h, k)$  عبارت است از

۲.  $f(h, y) + f(x, k)$ ۱.  $f(h, y) \cdot f(x, k)$ ۴.  $Df(h, y) + Df(x, k)$ ۳.  $Df(h, y) \cdot Df(x, k)$ 

۸- برای تابع دو متغیره حقیقی  $f$  که دو بار در  $a \in \mathbb{R}^2$  مشتق پذیر باشد کدام گزینه درست است؟

۱. ماتریس هسیان  $f$  یک ماتریس  $1 \times 2$  است.۲. ماتریس هسیان  $f$  یک ماتریس  $2 \times 1$  است.

۳. 
$$\left( (D^2 f(a))(h) \right)(k) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 D_{ji}(a) h_j k_i$$

۴. 
$$\left( (D^2 f(a))(h) \right)(k) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 D_{ij}(a) h_j k_i$$

سری سوال: ۱ یک

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

عنوان درس: آنالیز ریاضی، آنالیز ریاضی ۳

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (کاربردی)، ریاضی (محض) ۱۱۱۰۴۶ -، ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۴۳۲

۹- اگر تابع  $f: [0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  بطوریکه

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

آنگاه  $\int_{[0,1] \times [0,1]} f$  برابر است با

۱. ۰.۳

۲.  $\frac{1}{4}$

۳.  $\frac{1}{2}$

۴.  $\frac{3}{4}$

۱۰- کدام یک از مجموعه های زیر دارای اندازه ناصفر است؟

۱. مجموعه های منتهای

۲. مجموعه اعداد گویا

۳. مجموعه اعداد گنگ

۱۱- اگر  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  یک بازه بسته و  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی کراندار باشد کدام گزینه برای مجموعه

$$B_\varepsilon = \{x \in A \mid |f(x) - \inf f| \geq \varepsilon\}$$
 به ازاء هر  $\varepsilon > 0$  درست است؟

۱.  $B_\varepsilon$  فشرده است.۲.  $B_\varepsilon$  دارای اندازه صفر است.۳. تابع  $f$  بر  $B_\varepsilon$  پیوسته است.۴.  $B_\varepsilon$  ناتهی است.۱۲- هر عملگر خطی ضربه بر  $\mathbb{R}^n$  چند عضو پایه متعارف را با هم عوض می کند؟

۱. یک عضو

۲. دو عضو

۳. سه عضو

۴. چهار عضو

۱۳- تکیه گاه تابع  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{Q}^c \end{cases}$$
 کدام گزینه است؟

۱. تهی

۲.  $\mathbb{Q}$ ۳.  $\mathbb{Q}^c$ ۴.  $\mathbb{R}$ ۱۴- اگر  $T$  و  $S$  دو  $P$ -تانسور متناوب باشند آنگاه کدام یک از تانسورهای زیر نامتناوب است؟۱.  $Alt(T)$ ۲.  $T+S$ ۳.  $T-S$ ۴.  $T \otimes S$

سری سوال: ۱ یک

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

عنوان درس: آنالیز ریاضی، آنالیز ریاضی ۳

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (کاربردی)، ریاضی (محض) ۱۱۱۰۴۶ -، ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۴۳۲

۱۵- اگر  $T$  یک ضرب داخلی روی  $V$  باشد آنگاه تبدیل خطی  $f: V \rightarrow V$  را خود الحاق می نامیم هر گاه برای هر  $\forall x, y \in V$  داشته باشیم:

$$T(f(x), f(y)) = T(x, y) \quad .۲ \quad T(x, f(y)) = T(f(x), y) \quad .۱$$

$$T(f(x), f(y)) = T(y, x) \quad .۴ \quad T(f(x), f(y)) = T(f(y), f(x)) \quad .۳$$

۱۶- اگر  $X \subseteq \mathbb{R}^k$  و باز  $\omega$  یک  $P$ -فرم و  $\theta$  یک  $Q$ -فرم روی  $X$  باشند آنگاه  $\omega \wedge \theta$  برابر است با

$$(-1)^{p+q} \theta \wedge \omega \quad .۱ \quad -\theta \wedge \omega \quad .۲ \quad (-1)^{pq} \theta \wedge \omega \quad .۳ \quad (-1)^{[p,q]} \theta \wedge \omega \quad .۴$$

۱۷- اگر  $a > 0$  و  $b > 0$  مقادیر ثابت و برای هر  $t \in [0, 2\pi]$   $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$  یک منحنی بسته در  $\mathbb{R}^2$  و

$$\omega = xdy \quad \text{و} \quad \theta = ydx \quad \text{یک ۱-فرم روی } \mathbb{R}^2 \text{ باشند آنگاه مقدار } \int_{\gamma} \omega + \theta \text{ برابر است با}$$

$$\pi ab \quad .۱ \quad -\pi ab \quad .۲ \quad 2\pi \quad .۳ \quad 0 \quad .۴$$

۱۸- مشتق خارجی فرم  $\omega = 3xydx \wedge dy + zdy \wedge dz$  کدام گزینه است؟

$$3xdx \wedge dy \wedge dz \quad .۲ \quad 0 \quad .۱$$

$$3dx \wedge dy \wedge dz \quad .۴ \quad 3ydx \wedge dy \wedge dz \quad .۳$$

۱۹- کدام یک از سادکهای زیر سه رأس و سه وجه دارد؟

$$Q^4 \quad .۴ \quad Q^3 \quad .۳ \quad Q^2 \quad .۲ \quad Q^1 \quad .۱$$

۲۰- اگر قضیه استوکس را در حالت خاص برای زنجیرهای ۳ بعدی در مجموعه های باز در  $\mathbb{R}^3$  به کار ببندیم کدام قضیه بدست می آید؟

$$\text{گراین} \quad .۱ \quad \text{استوکس} \quad .۲ \quad \text{دیوژانس} \quad .۳ \quad \text{پوانکاره} \quad .۴$$

### سوالات تشریحی

۱.۴۰ نمره

۱- ثابت کنید هر تبدیل خطی  $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  در هر نقطه  $x \in \mathbb{R}^n$  مشتق پذیر است و

$$T'(x) = T$$

سری سوال: ۱ یک

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

عنوان درس: آنالیز ریاضی، آنالیز ریاضی ۳

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (کاربردی)، ریاضی (محض) ۱۱۱۰۴۶ -، ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۴۳۲

۱.۴۰ نمره

۲- نگاشت  $f = (f_1, f_2)$  از  $R^5$  به  $R^2$  با ضابطه

$$f_1(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = e^{x_1} - 2y_1 + x_2y_3$$

$$f_2(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = x_2 \cos x_1 + x_1y_2 - 2y_3 + y_1$$

اگر  $a = (0, 1)$  مفروض استو  $b = (1, -1, 1)$  باشد ثابت کنید همسایگی  $W$  از  $b$  و  $c$  نگاشت  $g: W \rightarrow R^2$  موجود استبطوریکه  $g(b) = a$  و به ازای هر  $y \in W$ ،  $f(g(y), y) = 0$  بوده و ماتریس  $g'(1, -1, 1)$  را بدست آورید.

۱.۴۰ نمره

۳- ثابت کنید اگر مجموعه  $A$  فشرده و با اندازه صفر باشد آنگاه  $A$  با قدر صفر است مثالی بیاورید که ثابت کند اگر  $A$  فشرده نباشد قضیه برقرار نیست.

۱.۴۰ نمره

۴- اگر  $d$  مشتق خارجی روی فرمهای هموار بر مجموعه  $U \subseteq R^k$  و  $\omega$  یک  $P$ -فرم باشد آنگاه

$$d(\omega \wedge \theta) = (d\omega) \wedge \theta + (-1)^P \omega \wedge d\theta$$

۱.۴۰ نمره

۵- اگر  $\omega$  یک  $k$ -فرم بسته در  $E$  و  $\psi$  یک زنجیر  $(k+1)$  بعدی در  $E$  باشد مطلوبست محاسبه انتگرال زیر

$$\int_{\partial\psi} \omega =$$