تعداد سوالات : تستی : ۲۰ **تشریحی :** ۵ | **زمان آزمون (دقیقه) : تستی :** ۶۰ **تشریحی :** ۷۰ | **سری سوال :** یک ۱

درس : آنالیز ریاضی

رشته تحصیلی/کد درس : ریاضیات و کاربردها۱۱۱۱۴۳۲

۱- هردو نرم روی فضای برداری حقیقی V با چه بعدی با هم معادلند؟

۱. باهر بعدی
۲. بابعد نا متناهی
۳. بابعد شمارشپذیر
۴. با بعد متناهی

۲- فرض کنید V,W دو فضای برداری نرمدارو $T\in L(V,W)$. دراین صورت کدام گزینه باسایرین معادل نیست؟

۱. T پیوسته است.
۲. T کرانداراست.
۳. T در نقطه $0_v\in V$ پیوسته است.
۴. T . یک به یک وپوشاست.

۳- فرض کنید $f:D\subseteq R^n\to R$ و D مجموعه ای باز باشد،کرانداری مشتقات جزئی f روی D چه شرطی برای پیوستگی f روی D می باشد؟

۱. شرط کافی
۲. شرط لازم
۳. شرط لازم وکافی
۴. مستقل ازهم می باشند .

۴- فرض کنید $T\in L(R^n,R^m)$ آنگاه ...

۱. T' نگاشت همانی است.
۲. $T'=0$ یعنی T' تبدیل خطی صفر است.
۳. T' نگاشتی ثابت است.
۴. $T'=T$

۵- فرض کنید $f:D\subseteq R^n\to R^m$ و $f\in C^2(K)$ آنگاه ...

۱. $f'':D\to L(R^n,L(R^n,R^m)$
۲. $f''\in L(R^n,L(R^n,R^m)$
۳. برای هر $x\in D$ ، $f''(x):D\to L(R^n,L(R^n,R^m)$
۴. برای هر $x\in D$ ، $f''(x):D\to L(R^n,R^m)$

۶- اگر $D_j f_i$ به ازای $1 \le j \le n, 1 \le i \le m$ مشتقات جزئی تابع $f : D \subseteq R^n \to R^m$ باشندآنگاه ....

۱. وجود این مشتقات جزئی در D برای مشتقپذیری f در D کافیست.

۲. $f \in C'(D)$ اگروفقط اگراین مشتقات جزئی در D موجود است.

۳. اگر f در x مشتقپذیر باشدآنگاه این مشتقات جزئی موجود است.

۴. $f \in C(D)$ اگروفقط اگراین مشتقات جزئی در D موجود است.

۷- فرض کنید $f : D \subseteq R^n \to R^n$ یک نگاشت C' که در آن D بازوبه ازای هر $x \in D$ ، $f'(x)$ وارونپذیرباشد آنگاه ...

۱. f^{-1} نگاشت بازو f^{-1} بطور موضعی یک به یک است.

۲. f نگاشت بازو f بطور موضعی یک به یک است.

۳. f نگاشت بازو f^{-1} بطور موضعی یک به یک است.

۴. f^{-1} نگاشت بازو f بطور موضعی یک به یک است.

۸- فرض کنید $f = (f_1, f_2)$ که درآن $f_1(x, y) = e^x \cos y$ و $f_2(x, y) = e^x \sin y$ نگاشتی از R^2 به R^2 باشد.کدام گزینه زیر صحیح نیست؟

۱. ژاکوبین f در هر نقطه از R^2 مخالف صفر است.

۲. هر نقطه از R^2 شامل یک همسایگی است که در آن f یک به یک است.

۳. f روی R^2 یک به یک است .

۴. $f \in C'$

۹- درتابع $f : R^2 \to R$ با ضابطه

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

کدام گزینه زیر صدق میکند؟

۱. f درنقطه $(0,0)$ پیوسته نیست.

۲. $D_2 f, D_1 f$ در $(0,0)$ پیوسته نیست.

۳. $D_{21} f, D_{12} f$ درنقطه $(0,0)$ پیوسته نیست.

۴. $D_{21} f(0,0) = D_{12} f(0,0)$.

۱۰- فرض کنید $f: I \subseteq R^n \to R$ که در آن f کرانداروِ I بسته است.کدامیک ازگزینه های زیرمعادل انتگرالپذیری f روی I نیست؟

۱. تابع f دربازه I پیوسته است.

۲. $\underline{\int_I} f = \overline{\int_I} f$

۳. برای هر $\varepsilon > 0$،افرازی چون P از I موجود است بطوریکه $U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$

۴. مجموعه نقاط ناپیوسته f در I دارای اندازه صفراست.

۱۱- کدام گزینه درمورد $A \subseteq R^n$ صحیح است؟

۱. اگر A دارای اندازه صفر باشد آنگاه قدر A صفر است.

۲. اگر $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ وهر A_i دارای قدرصفر باشد قدر A نیزصفراست.

۳. هرزیرمجموعه شمارا از R^n دارای قدر صفر است.

۴. اگر $C \subseteq A \subseteq R^n$ ، A بسته و χ_C تابع مشخصه C ، $\chi_C : A \to R$ انتگرالپذیراست هرگاه اندازه مرز C ،صفرباشد.

۱۲- فرض کنید $A \subseteq R^n$ مجموعه بسته و $f: A \to R$ تابع کراندارباشد آنگاه ....

۱. f درنقطه $a \in A$ ناپیوسته است اگروفقط اگر $o(f, a) \neq 0$.

۲. برای هر $\varepsilon > 0$،مجموعه $\{x \in A : o(f, x) \geq \varepsilon\}$ فشرده است.

۳. اگر f نامنفی و $\int_A f = 0$ آنگاه $\{x : f(x) = 0\}$ دارای اندازه صفر است.

۴. مجموعه $\{x \in A : o(f, x) = 0\}$ فشرده است.

۱۳- برای تابع $f: R^n \to R(\phi)$ کدامیک ازگزاره های زیر صدق می کند؟

۱. مجموعه $E=\{x\in R^n : f(x)\neq 0\}$ راتکیه گاه f می نامیم.

۲. متمم تکیه گاه f، همان صفرهای f است.

۳. اگر f پیوسته با تکیه گاه فشرده و $I \subseteq R^n$ بازه بسته حاوی تکیه گاه f باشدآنگاه $\int_{R^n} f = \int_I f$ واین انتگرال مستقل ازانتخاب I حامل تکیه گاه f است.
تکیه گاه f است.

۴. هرگاه $f \in C(R^n)$ وتکیه گاه f فشرده باشد،آنگاه $f = \sum_{i=1}^{s} \psi_i f$ که درآن ψ_i ها درقضیه افراز واحد صدق میکنند.

۱۴- کدام گزینه زیردرموردتانسورها صحیح می باشد؟

۱. اگر $Alt(T)=T$ آنگاه T تانسورمتناوب می باشد ولی برعکس صحیح نیست

۲. مجموع وضرب اسکالرتانسورهای متناوب،متناوب است.

۳. ضرب تانسوری تانسورهای متناوب ، متناوب است.

۴. تانسور T، متناوب است هرگاه با تعویض دو جمله علامت تانسورعوض نشود.

۱۵- مشتق خارجی d روی فرمهای همواربرمجموعه باز $U \subseteq R^n$ دارای کدامیک ازخواص زیر گزینه های زیر نمی باشد؟

۱. $d(\upsilon+\omega)=d\upsilon+d\omega$

۲. اگر $d\omega=0$ باشد آنگاه $\omega=0$

۳. با تعریف df (عملگردیفرانسیل)روی توابع پیوسته مطابقت دارد.

۴. $d(d\omega)=0$

۱۶- فرض کنید $\omega=\dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ یک ۱- فرم در $R^2-\{0\}$ و $\gamma(t)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ برای $0\le t\le 2\pi$ باشدآنگاه ...

۱. $\int_\gamma \omega=\pi$

۲. $d\omega=1$

۳. ω بسته است.

۴. $\int_\gamma \omega=0$

۱۷– فرض کنید ω یک k - فرم درمجموعه باز $E \subseteq R^n$ باشد آنگاه ...

۱. هرگاه $d\omega \neq 0$ آنگاه ω یک فرم بسته است.

۲. k - فرمی مانند λ در E باشد بطوریکه $\omega = d\lambda$ ، آنگاه ω را یک فرم کامل نامند.

۳. اگر ω یک k - فرم بسته در E باشدبه ازای هرزنجیر k - بعدی Ψ از رده C^2 در E ، $\int_{\partial\psi}\omega = \int_{\psi} d\omega$.

۴. اگر ω بسته و E محدب باشد ω کامل است.

۱۸– به ازای $k \geq 0$ ،اگر $\sigma = [P_0, P_1, \dots, P_k]$ سادک k - بعدی مستوی جهت دار باشدآنگاه ...

۱. اگر $\overline{\sigma} = S(i_0, \dots, i_k)\sigma$ آنگاه $\overline{\sigma} = \pm\sigma$.

۲. تصویرسادک متعارف Q^{k+1} می باشد.

۳. زنجیر k - بعدی مستوی $\partial\sigma = \sum_{J=1}^{J=k} (-1)^j \sigma_j$ ،مرز σ است.

۴. σ یک سطح $k+1$ - بعدی در R^n با قلمرو Q^k می باشد.

۱۹– نرمهای متفاوت روی یک فضای برداری چه نوع از توپولوژی ها را ایجاد می کند؟

۱. توپولوژی های یکسان

۲. در فضاهای نرمدار با بعد متناهی توپولوژی های یکسان ایجاد می کند.

۳. در فضاهای نرمدار با بعد نامتناهی توپولوژی های یکسان ایجاد می کند.

۴. توپولوژی های متفاوت ایجاد می کند.

۲۰– هرگاه ω و λ به ترتیب فرمهای $k-$ بعدی و $m-$ بعدی باشند آنگاه $\omega \wedge \lambda$ برابر است با

۱. $(-1)^{k+m}\lambda \wedge \omega$ ۲. $((-1)^k)^m \lambda \wedge \omega$ ۳. $((-1)^m)^k \lambda \wedge \omega$ ۴. $(-1)^{km}\lambda \wedge \omega$

سوالات تشریحی

۱– فرض کنید $T \in L(R^n, R^m)$. ثابت کنید برای هر $x \in R^n$ ، $T'(x)$ موجودو $T'(x) = T$. — ۱،۲۴ نمره

۲- نگاشت $f=(f_1,f_2)$ از R^5 به R^2 رابصورت
$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2,y_1,y_2,y_3)=e^{x_1}-2y_1+x_2y_3 \\ f_2(x_1,x_2,y_1,y_2,y_3)=x_2\cos x_1+x_1y_2-2y_3+y_1 \end{cases}$$
و $a=(0,1)$ و $b=(1,-1,1)$ درنظر گرفته وثابت کنید $f(a,b)=0_2$ وماتریسهای $[A]=[f'(a,b)]$ و $[A_x]$ و $[A_y]$ بدست آورده وهمچنین ثابت کنید مجموعه باز $U\subseteq R^5$ شامل (a,b) و مجموعه باز $W\subseteq R^3$ شامل b و $-C'$ نگاشت g از W به R^2 موجودند بطوریکه $g(b)=a$ و به ازای هر $y\in w$ ، $f(g(y),y)=0_2$ و ماتریس $g'(b)$ بدست آورید. «قراردهید: $x=(x_1,x_2)$ و $y=(y_1,y_2,y_3)$ » — ۱،۲۴ نمره

۳- اگر A فشرده واندازه اش صفر باشد،آنگاه قدرش صفر است. — ۱،۲۴ نمره

۴- ثابت کنید مشتق خارجی هرفرم منحصر بفرد است. — ۱،۲۴ نمره

۵- (لم پوانکاره):ثابت کنید فرمهای بسته درمجموعه های باز ومحدب R^n کاملند. — ۲،۰۴ نمره