



تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

نام درس: آنالیز ریاضی ۲

رشته تحصیلی/ کُد درس: ریاضی (کاربردی-محض) جبرانی ارشد ۱۱۱۱۰۴۱-آمار ۱۱۱۱۰۸۸

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

مجاز است.

استفاده از:

۱- اگر P_1 و P_2 دو افراز از $[a, b]$ باشند و $P_1 \subseteq P_2$ آنگاه کدام گزینه صحیح است؟

الف) $U(P_2, f, \alpha) = U(P_1, f, \alpha)$ (ب) $U(P_2, f, \alpha) \leq U(P_1, f, \alpha)$

ج) $L(P_2, f, \alpha) \geq U(P_1, f, \alpha)$ (د) $L(P_1, f, \alpha) \geq L(P_2, f, \alpha)$

۲- اگر $f(x) = \begin{cases} x & ; x \in Q \cup [0, 1] \\ -x & ; x \notin Q \cap [0, 1] \end{cases}$ و $\alpha(x) = \begin{cases} 1 & ; 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2 & ; \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$ باشد

آنگاه حاصل $\int_0^1 f(x) d\alpha(x)$ کدام است؟

الف) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{1}{4}$ (ج) $-\frac{1}{2}$ (د) $-\frac{1}{4}$

۳- بر بازه $[a, b]$ کدام گزینه صحیح است؟

الف) اگر f صعودی و α صعودی و پیوسته باشد، آنگاه $f \in R(\alpha)$.

ب) اگر f و α هر دو صعودی باشند آنگاه $f \in R(\alpha)$.

ج) اگر f و α در نقطه x_0 از چپ ناپیوسته باشند آنگاه $f \in R(\alpha)$.

د) اگر ناپیوستگی های f و α در یک طرف نباشد آنگاه $f \notin R(\alpha)$.

۴- حاصل $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{7}{3}} [2x] d[x]$ کدام گزینه است؟

الف) ۱ (ب) ۲ (ج) ۳ (د) موجود نیست

۵- کدام گزینه معرف یک انتگرال ناسره مطلقاً همگراست؟

الف) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ (ب) $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

ج) $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ (د) $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x} dx$



تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

نام درس: آنالیز ریاضی ۲

رشته تحصیلی/ کُد درس: ریاضی (کاربردی-محض) جبرانی ارشد ۱۱۱۱۰۴۱-آمار ۱۱۱۱۰۸۸

مجاز است.

استفاده از:

۶- مقدار $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ کدام است؟

- الف) π ب) $\frac{\pi}{2}$ ج) صفر د) موجود نیست

۷- اگر به ازای هر عدد حقیقی A تابع f بر $[0, A]$ انتگرال پذیر باشد و $f(x) \rightarrow 1$ وقتی که $x \rightarrow \infty$ آنگاه حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} t \int_0^{\infty} e^{-tx} f(x) dx$ کدام گزینه است؟

- الف) ۱ ب) ۲ ج) صفر د) موجود نیست

۸- کدام یک از توابع زیر بر $[0, 1]$ با تغییر کراندار است؟

الف) $f(x) = \begin{cases} 0 & : x \in Q \\ 1 & : x \notin Q \end{cases}$ ب) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \cos \frac{1}{x} & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$

ج) $f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x} & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$ د) $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$

۹- کدام گزینه صحیح است؟

- الف) اگر تابع f بر $[a, b]$ صعودی باشد آنگاه f بر این بازه ممکن است با تغییر کراندار نباشد.
ب) اگر تابع f بر $[a, b]$ دارای مشتق کراندار باشد آنگاه f تغییر کراندار نیست.
ج) اگر تابع f بر $[a, b]$ با تغییر کراندار باشد آنگاه f بر $[a, b]$ کراندار است.
د) اگر تابع f بر $[a, b]$ کراندار باشد آنگاه f بر $[a, b]$ با تغییر کراندار است.



تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

نام درس: آنالیز ریاضی ۲

رشته تحصیلی/ کُد درس: ریاضی (کاربردی-محض) جبرانی ارشد ۱۱۱۱۰۴۱-آمار ۱۱۱۱۰۸۸

مجاز است.

استفاده از:

۱۰. فرض کنید f تابعی با تغییر کراندار بر $[a, b]$ باشد. تابع v را بر $[a, b]$ به صورت

$$v(x) = \begin{cases} v_f(a, x) : a < x \leq b \\ 0 : x = a \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت کدام گزینه در مورد تابع v صحیح است؟

(الف) تابع v بر $[a, b]$ نزولی است.

(ب) تابع $D = v - f$ بر $[a, b]$ صعودی است.

(ج) تابع $D = v - f$ بر $[a, b]$ نزولی است.

(د) مجموعه نقاط ناپیوستگی v شمارا است.

۱۱- کدام گزینه صحیح است؟

(الف) اگر تابع $f \in R(\alpha)$ آنگاه $\|f\| \in R(\alpha)$.

(ب) اگر توابع f, g بر $[a, b]$ با تغییر کراندار باشند، آنگاه $Af + Bg$ بر $[a, b]$ ممکن است با تغییر کراندار نباشد.

(ج) اگر توابع f, g بر $[a, b]$ با تغییر کراندار باشند، آنگاه ممکن است $f \cdot g$ بر $[a, b]$ با تغییر کراندار نباشد.

(د) اگر توابع نامنفی f, g بر $[a, b]$ با تغییر کراندار باشند، آنگاه $\frac{f}{g}$ بر $[a, b]$ با تغییر کراندار است.

۱۲- دنباله $\{f_n\}$ با ضابطه $f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ بر R تعریف شده است. حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$ ($x \in R$) کدام گزینه

است؟

(الف) صفر (ب) ۱ (ج) ۲ (د) موجود نیست

۱۳- سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ بر کدام بازه به طور یکنواخت همگراست؟

(الف) $[0, \pi]$ (ب) $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (ج) $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ (د) $[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

نام درس: آنالیز ریاضی ۲

رشته تحصیلی/ کُد درس: ریاضی (کاربردی-محض) جبرانی ارشد ۱۱۱۱۰۴۱-آمار ۱۱۱۱۰۸۸

مجاز است.

استفاده از:

۱۴- کدام یک از دنباله های زیر همگرای یکنواخت است؟

الف) $f_n(x) = \frac{\cos nx}{nx} ; x \in (0, 1)$

ب) $f_n(x) = x^n(1-x) ; x \in [0, 1]$

ج) $f_n(x) = nxe^{-nx} ; x \in [0, 1]$

د) $f_n(x) = x^n ; x \in [0, 1]$

۱۵- کدام گزینه صحیح است؟

الف) فرض کنید $f_n \Rightarrow f$ و $f_n \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ باشد آنگاه $f \notin R(\alpha)$ بر $[a, b]$

ب) فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله ای از توابع پیوسته بر E باشد که به طور یکنواخت به f همگراست در این صورت f نا پیوسته است.

ج) شرط لازم و کافی برای آنکه $f_n \Rightarrow f$ بر E ، آن است که $\delta_n = \sup |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$.

د) اگر f در شرط یکنواخت کوشی صدق کند آنگاه f به طور یکنواخت همگرا نیست.

۱۶- اگر X یک فضای متریک فشرده باشد و $f_n \in C(X)$ به طور نقطه ای کراندار و پیوسته باشد آنگاه کدام گزینه صحیح است؟

الف) $\{f_n\}$ بر X به طور یکنواخت کراندار است.

ب) $\{f_n\}$ بر X به طور یکنواخت همگراست.

ج) هیچ زیر دنباله ای از $\{f_n\}$ موجود نیست که به طور یکنواخت همگرا باشد.

د) هیچ دنباله ای از $\{f_n\}$ موجود نیست که همپیوسته باشد.



تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

نام درس: آنالیز ریاضی ۲

رشته تحصیلی/ کُد درس: ریاضی(کاربردی-محض) جبرانی ارشد ۴۱۱۱۰۴-آمار ۱۱۱۱۰۸۸

مجاز است.

استفاده از:

۱۷- شعاع همگرایی $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^{n!}$ کدام است؟الف) ∞ (الف) ب) ۱ (ب) ج) ۲ (ج) د) صفر (د)۱۸- فرض کنید $s(x) = \frac{E(ix) - E(-ix)}{2i}$ دوره تناوب $s(x)$ کدام است؟الف) π (الف) ب) 2π (ب) ج) $\frac{\pi}{2}$ (ج) د) $2\pi i$ (د)۱۹- تابع نمایی E بر صفحه مختلط \mathbb{C} با ضابطه $E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ تعریف می شود. کدام گزینه در مورد تابع E

صحیح است؟

الف) تابع E اکیداً نزولی است. ب) شعاع همگرایی این سری صفر است.ج) تابع E اکیداً صعودی است. د) تابع E مشتق پذیر نیست.۲۰- شعاع همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ex)^n}{2\sqrt{n}}$ کدام گزینه است؟الف) $\frac{1}{e}$ (الف) ب) e (ب) ج) e^2 (ج) د) $2e$ (د)



تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

نام درس: آنالیز ریاضی ۲

رشته تحصیلی/ کُد درس: ریاضی (کاربردی-محض) جبرانی ارشد ۱۱۱۱۰۴۱-آمار ۱۱۱۱۰۸۸

مجاز است.

استفاده از:

سوالات تشریحی (بارم هر سوال ۲ نمره)

۱- فرض کنید $a < c < b$ و f در c پیوسته باشد و $\alpha(x) = I(x - c)$ آنگاه ثابت کنید $f \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ و

$$\int_a^b f d\alpha = f(c)$$

۲- فرض کنید تابع f بر $[a, b]$ پیوسته و نامنفی باشد. اگر x_0 ای در بازه (a, b) باشد که $f(x_0) > 0$

$$\int_a^b f(x) dx > 0$$

آنگاه نشان دهید

۳- فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ به طور یکنواخت همگرا و $\{g_n\}$ به طور یکنواخت کراندار باشد. نشان دهید سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$$

به طور یکنواخت همگراست.

۴- اگر X یک فضای متریک فشرده باشد و $f_n \in C(X)$ و $f_n \Rightarrow f$ ، آنگاه نشان دهید $\{f_n\}$ همپیوسته است.

۵- فرض کنید f بر $[0, 1]$ پیوسته باشد و به ازای هر عدد طبیعی $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

$$\int_0^1 x^n f(x) dx = 0$$

آنگاه نشان دهید $f = 0$