

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: یک ۱

عنوان درس: روشهای چندمتغیره پیوسته

رشته تحصیلی/کد درس: آمار۰۴۹۱۱۷

استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است

۱- اگر بردار تصادفی  $P$  بعدی  $X$  را به صورت  $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$  افراز کنیم و  $\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$  ماتریس کو

واریانس مربوطه باشد آنگاه کدام گزینه زیر درست است؟

۱.  $\Sigma_{11}$  ,  $\Sigma_{22}$  نامتقارن هستند.

۲.  $\Sigma_{22}$  یک ماتریس متقارن است.

۳.  $\Sigma_{12}$  ماتریس کو واریانس  $X_1$  ,  $\Sigma_{21}$  ماتریس کو واریانس  $X_2$  است.

۴.  $\text{cov}(BX_1, CX_2) = B \Sigma_{12} C' \neq B' \Sigma_{21} C$

۲- اگر  $X$  یک بردار تصادفی  $P$  بعدی باشد وقتی  $P = 4$  است.

۱.  $M_{-2X_1 + X_2}(t) = M_X(0, -2t, t, 0)$

۱.  $M_{X_1 - X_2}(t) = M_X(t, 1, -t, 1)$

۲.  $M_{X_2}(t) = M_X(1, 1, 1, t)$

۳.  $M_{AX+B}(t) = e^{tB} M_X(A't)$

۳- اگر  $E(X) = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$  و  $E = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$  مقدار  $E(XX')$  کدام است؟

۱.  $\begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$

۲.  $\begin{pmatrix} 6 & -9 \\ -9 & 22 \end{pmatrix}$

۳.  $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 32 \end{pmatrix}$

۴.  $\begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$

۴- اگر  $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$  ,  $\mu = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$  ,  $\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$  ,  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$  باشد  $E(X'AX)$  کدام است؟

۱. ۱۶۰

۲. ۱۵۸

۳. صفر

۴. ۲۲

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: روشهای چندمتغیره پیوسته

رشته تحصیلی/کد درس: آمار۰۴۹۱۱۷

۵- اگر  $X_1 = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ ,  $X_2 = \begin{pmatrix} X_3 \\ X_4 \end{pmatrix}$  افزازهایی از  $X$  باشند

$$X_1 | X_2 = x_2 \sim N_2 \left( \begin{bmatrix} \frac{x_4}{3} - \frac{x_3}{3} \\ -4x_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & \frac{7}{2} \end{bmatrix} \right)$$

$\text{var}(X_1 - 2X_2 + 3 | X_2 = X_4 = 0)$  کدام است؟

۲۶ .۴

۹ .۳  
۲

۲۳ .۲

۱۵ .۱

۶- فرض کنید  $\underline{X} \sim N_3(\mu, \Sigma)$  باشد. اگر

$$\mu_{X_1 | X_2 = x_2} \text{ آنگاه} = \begin{pmatrix} x_4 + \frac{1}{2} \\ -\frac{x_3}{4} \end{pmatrix}, x_1 = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, \text{var}(x_2) = 2, \Sigma_{11} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\text{var}(X_1 | X_2 = x_2)$  کدام است؟

۴.  $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{23}{8} \end{pmatrix}$

۳.  $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{23}{16} \end{pmatrix}$

۲.  $\begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{23}{8} \end{pmatrix}$

۱.  $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{23}{16} \end{pmatrix}$

۷- فرض کنید  $X \sim N_4(\mu, \Sigma)$  که در آن  $\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ ,  $\mu = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$  میانگین توزیع  $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix}$

به شرط  $X_2 + X_3 = 1$  چقدر است؟

۴.  $\begin{pmatrix} -\frac{23}{7} \\ 13 \end{pmatrix}$

۳.  $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$

۲.  $\begin{pmatrix} -\frac{23}{7} \\ 8 \end{pmatrix}$

۱.  $\begin{pmatrix} \frac{23}{7} \\ 8 \end{pmatrix}$

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: روشهای چندمتغیره پیوسته

رشته تحصیلی/کد درس: آمار۰۴۹۱۱۷

۸- برآورد درست‌نمایی ماکسیمم بردار میانگین  $\mu$  و ماتریس کوواریانس  $\Sigma$  بر اساس نمونه تصادفی

$$\langle X \rangle = \begin{bmatrix} ۳ & -۴ & ۵ & ۲ & ۴ \\ -۱ & ۴ & ۷ & ۳ & ۲ \end{bmatrix}$$

از یک جامعه نرمال دو متغیره به ترتیب از راست به چپ عبارتند از:

$$\begin{pmatrix} ۱۲,۵ & ۰ \\ ۰ & ۸,۵ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۲ \\ ۳ \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} ۱۲,۵ & ۰ \\ ۰ & ۸,۵ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۲,۵ \\ ۳,۷۵ \end{pmatrix} \quad .۱$$

$$\begin{pmatrix} ۱۲ & -۱ \\ -۱ & ۶ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۲ \\ ۳ \end{pmatrix} \quad .۴ \quad \begin{pmatrix} ۱۰ & ۰ \\ ۰ & ۶,۸ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۲ \\ ۳ \end{pmatrix} \quad .۳$$

۹- اگر  $X \sim N_n(\mu, I_n)$  که در آن  $L$  برداری  $n$  بعدی با درایه های ۱ است، توزیع  $n^2 \bar{X}$  کدام است؟

۱. کی دو با  $n-1$  درجه آزادی و پارامتر نامرکزی  $\mu^n$

۲. کی دو با  $n$  درجه آزادی و پارامتر نامرکزی  $\mu^n$

۳. کی دو با  $n$  درجه آزادی

۴. کی دو با  $n$  درجه آزادی و پارامتر نامرکزی  $\mu^n$

۱۰- تحت مدل کوواریانس بین طبقه ای (interclass) اگر ماتریس کوواریانس نمونه ای به صورت زیر باشد برآورد ضریب همبستگی جامعه کدام است؟

$$S = \begin{bmatrix} ۷ & ۴ & -۱ \\ ۴ & ۶ & ۲ \\ -۱ & ۲ & ۹ \end{bmatrix}$$

$$\frac{۲۲}{۳۳} \quad .۴$$

$$\frac{۵}{۲۲} \quad .۳$$

$$\frac{۱۶}{۲۲} \quad .۲$$

$$\frac{۱۰}{۲۲} \quad .۱$$

۱۱- فرض کنید  $y \sim N_3(\mu, \Sigma)$  که در آن  $\Sigma = \begin{pmatrix} ۴ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۳ \end{pmatrix}$  است. مقدار  $\rho_{۱,۲,۳}$  کدام است؟

$$۰/۳۷۳۰ \quad .۴$$

$$۰/۳۵۳۶ \quad .۳$$

$$۰/۳۸۷۳ \quad .۲$$

$$۰/۴۷۹۸ \quad .۱$$

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: روشهای چندمتغیره پیوسته

رشته تحصیلی/کد درس: آمار: ۱۱۱۷۰۴۹

۱۲- اندازه ی همبستگی دو بردار تصادفی را به صورت ..... تعریف می کنیم.

۱. همبستگی جزئی      ۲. همبستگی متعارف      ۳. همبستگی چندگانه      ۴. همبستگی ساده

۱۳- اگر  $\mu_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  میانگین های دو جامعه نرمال با ماتریس کوواریانس  $\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  باشند، مجذور

فاصله ماهالانوبیس چیست؟

۱.  $\frac{3}{2}$       ۲.  $\frac{1}{3}$       ۳.  $\frac{2}{3}$       ۴. ۳

۱۴- فرض کنید  $X = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 10 \\ 3 & 9 & 6 \end{bmatrix}$  ماتریس داده های مربوط به یک نمونه ۳ تایی از توزیع نرمال دو متغیره باشد. اگر

$\mu_0 = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}$  باشد مقدار آماره  $T^2$  کدام است؟

۱.  $\frac{16}{9}$       ۲.  $\frac{9}{16}$       ۳.  $\frac{9}{7}$       ۴.  $\frac{7}{9}$

۱۵- اگر برای ۸۷ دانشجو  $\bar{X} = \begin{pmatrix} 527 \\ 54 \end{pmatrix}$ ،  $S = \begin{pmatrix} 569 & 600 \\ 600 & 126 \end{pmatrix}$  طول فاصله اطمینان ۹۵ درصد برای  $\mu_1$  چقدر

است؟

۱. ۱۳,۹۶۳      ۲. ۵,۹۷۷      ۳. ۱۲,۲۷۱      ۴. ۱۱,۹۵۵

۱۶- در یک توزیع نرمال دو متغیره، تصادفی  $\frac{1 - \sqrt{U_{2,2,3}}}{\sqrt{U_{2,2,3}}}$  دارای چه توزیعی است؟

۱.  $F_{4,4}$       ۲.  $F_{2,2}$       ۳.  $F_{2,4}$       ۴.  $F_{4,2}$

۱۷- اگر  $\Sigma = 2[(1-\rho)I_p + \rho ll']$  که  $l' = (1 \ 1)'$ ، مجموع واریانس های اولین و دومین مولفه های اصلی  $\Sigma$  کدامند؟

۱.  $4(1-\rho^2)$       ۲. ۲      ۳. ۴      ۴.  $1-\rho^2$

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: روشهای چندمتغیره پیوسته

رشته تحصیلی/کد درس: آمار۰۴۹۱۱۷

۱۸- کدام یک از موارد زیر انگیزه ای برای استفاده از مولفه های اصلی نیست؟

۱. تبدیل متغیرهای ناهمبسته به همبسته  
۲. کاهش حجم داده ها  
۳. یافتن متغیرهایی با واریانس بزرگ  
۴. کمک به تفسیر نتایج یا توصیف جامعه

۱۹- در روش رده بندی، احتمال رده بندی غلط یک فرد جامعه  $\pi_1$  در  $\pi_p$  کدام است؟

۱.  $P(l(X_{\circ}) > k | X_{\circ} \in \pi_p)$   
۲.  $P(l(X_{\circ}) > k | X_{\circ} \in \pi_1)$   
۳.  $P(l(X_{\circ}) < k | X_{\circ} \in \pi_p)$   
۴.  $P(l(X_{\circ}) < k | X_{\circ} \in \pi_1)$

۲۰- اگر  $\pi_1, \pi_p$  معرف دو جامعه نرمال با میانگین های  $\mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mu_p \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  با ماتریس کوواریانس مشترک

$\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  باشند، تابع ممیز خطی فیشر کدام است؟

۱.  $\frac{2X_{\circ 1} + X_{\circ 2}}{3}$   
۲.  $\frac{2X_{\circ 1} - X_{\circ 2}}{3}$   
۳.  $\frac{2X_{\circ 2} + X_{\circ 1}}{3}$   
۴.  $\frac{X_{\circ 1} - 2X_{\circ 2}}{3}$

### سوالات تشریحی

۱.۵۰ نمره

۱- اگر  $Z = (Z_1, Z_2)'$  که  $Z_1 = y_1 + y_2 + y_3, Z_2 = y_1 + y_2 - 2y_3$  و  $Z_3 = 3y_1 + y_2 - 2y_3$  و  $W = (W_1, W_2, W_3)'$  که

$$W_3 = y_1 + y_2 + 2y_3, W_2 = y_1 + 2y_2 + 2y_3, W_1 = 2y_1 - y_2 + y_3$$

$$\Sigma_y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 10 \end{bmatrix} \text{ مقدار } \text{COV}(Z, W) \text{ کدام است؟}$$

۱.۰۰ نمره

۲- فرض کنید  $X \sim N_p(\underline{\theta}, \Sigma)$ ،  $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho \\ & 1 & \rho \\ & & 1 \end{bmatrix}$  توزیع  $y = \begin{pmatrix} L'X \\ CX \end{pmatrix}$  را بیابید.  
 $L' = (1 \ 1 \ 1)'$ ،  $C$  ماتریسی  $2 \times 3$  است.

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: روشهای چندمتغیره پیوسته

رشته تحصیلی/کد درس: آمار۰۴۹۱۱۱۷

۳- محققى برای اندازه گیری جدی بودن حمله های قلبی ۳ شاخص را بررسی می کند. برای  $n = ۴۰$  بیمار حمله قلبی مقادیر این شاخص ها به صورت زیر بوده اند. تساوی میانگین شاخص ها را در سطح  $\alpha = ۰,۰۵$  بیازمائید.

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} ۴۶,۱ \\ ۵۷,۳ \\ ۵۰,۴ \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} ۱۰۱,۳ & ۶,۳ & ۷,۱ \\ & ۸۰,۲ & ۵۵,۶ \\ & & ۹۷,۴ \end{pmatrix} F_{۲,۳۸,۰,۰۵} = ۳/۲۴۵$$

۴- ثابت کنید اگر  $X \sim N_p(\mu, I_p)$  آنگاه  $X' A_1 X$  و  $X' A_2 X$  مستقلند اگر و تنها اگر  $A_1 A_2 = 0$

۵- ثابت کنید  $E_p = \Phi\left(-\frac{\Delta}{\mu}\right)$  و  $\Delta$  فاصله ماهالانویس بین دو جامعه است و  $E_p$  خطای رده بندی  $X_0$  به  $\pi_1$  است وقتی  $X_0$  در واقع متعلق به  $\pi_2$  بوده است.