

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: یک ۱

عنوان درس: مبانی آنالیز ریاضی

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضیات و کاربردها، آمار و کاربردها، علوم کامپیوتر ۱۱۱۱۳۲۲

۱- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} [2 + (-1)^n]$ کدام گزینه است؟

۱. ∞ ۲. ۱ ۳. ۳ ۴. ۶

۲- اگر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دنباله هایی کراندار از اعداد حقیقی باشند کدام گزینه صحیح است؟

۱. $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n$ ۲. $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n$

۳. $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n$ ۴. $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n$

۳- بزرگترین کران پایین $B = \{x \mid x \in R, 2x^2 - 3x + 1 < 0\}$ کدام است؟

۱. ۱ ۲. ۲ ۳. $\frac{1}{2}$ ۴. ندارد

۴- کدام گزینه برای سری $a + (a+b) + (a+2b) + (a+3b) + \dots$ به ازای هر دو عدد حقیقی a و b برقرار است؟

۱. کراندار است. ۲. همگراست ۳. واگراست ۴. حکمی نمی توان داد.

۵- کدامیک از سریهای زیر همگراست؟

۱. $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n})$ ۲. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ ۳. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ۴. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$

۶- اگر (M, d) فضای متریک گسسته و $A \subseteq M$ ، آنگاه مجموعه \overline{A} برابر کدام گزینه است؟

۱. $M - A$ ۲. A ۳. M ۴. \emptyset

۷- در مورد مجموعه اعداد گویا کدام گزینه صحیح است؟

۱. Q کامل نیست. ۲. Q کامل است. ۳. Q در R باز است. ۴. Q در R بسته است.

۸- فرض کنید $E \subseteq R^k$ در اینصورت کدام عبارت معادل سایر عبارتها نیست؟

۱. E فشرده است.

۲. هر دنباله کراندار و صعودی E همگراست.

۳. E بسته و کراندار است.

۴. هر زیر مجموعه نامتناهی E حداقل دارای یک نقطه انباشتگی است.

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: مبانی آنالیز ریاضی

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضیات و کاربردها، آمار و کاربردها، علوم کامپیوتر ۱۱۱۳۲۲

۹- کدام عبارت درست است؟

۱. بازه $[0,1]$ در R_d (با متریک گسسته) همبند است.

۲. اگر A و B همبند باشند ان گاه $A \cup B$ همبند است.

۳. اگر A_1 و A_2 همبند باشند و $A_1 \subseteq B \subseteq A_2$ ، انگاه B همبند است.

۴. اگر A همبند باشد انگاه \bar{A} نیز همبند است.

۱۰- تابع $f(x) = \begin{cases} \sin x & x \in Q \\ \cos x & x \notin Q \end{cases}$ در چه نقاطی پیوسته است؟

۱. $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ ۲. Q ۳. Q' ۴. $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

۱۱- توابع f و g بر R^2 با ضابطه های زیر تعریف شده اند.

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

کدام گزینه صحیح است؟

۱. f و g بر R^2 کراندار است.

۲. f در نقطه $(0,0)$ پیوسته است.

۳. f بر R^2 کراندار ولی g بر R^2 بی کران است.

۴. f و g بر R^2 بی کران است.

۱۲- اگر (X, d_X) و (Y, d_Y) دو فضای متریک باشند و تابع f از X به Y پیوسته باشد انگاه

۱. اگر $F \subseteq X$ باز باشد، انگاه $f(F)$ در Y باز است.

۲. اگر $F \subseteq X$ فشرده باشد، انگاه $f(F)$ در Y فشرده است.

۳. اگر $F \subseteq X$ بسته باشد، انگاه $f(F)$ در Y بسته است.

۴. f سوپریمم و اینفیمم مقادیر خود را در نقطه ای از X می گیرد.

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: مبانی آنالیز ریاضی

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضیات و کاربردها، آمار و کاربردها، علوم کامپیوتر ۱۱۱۱۳۲۲

۱۳- کدامیک از توابع زیر در صفر مشتق پذیر است؟

$$f(x) = |x| \quad .۲$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in Q \\ 0 & x \notin Q \end{cases} \quad .۱$$

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in Q \\ -x & x \notin Q \end{cases} \quad .۴$$

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad .۳$$

۱۴- تابع f بر بازه (a, b) در نقطه c در شرط لیبشیتز از مرتبه α صدق می کند در صورتی که عددی مثبت مانند M موجود باشد به طوری که

$$|f(x) - f(c)| \leq M |x - c|^\alpha \quad a < x < b$$

در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

۰۲ اگر $\alpha > 1$ ، f در c دارای مشتق است..

۰۱ اگر $\alpha > 0$ ، f در c پیوسته نیست.

۰۴ اگر $\alpha > 0$ ، f در c دارای مشتق است.

۰۳ اگر $\alpha = 1$ ، f در c دارای مشتق است.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1+3x)^{\frac{1}{x}} \quad -۱۵$$

برابرست با

۰۳ حد وجود ندارد.

۰۲

۰۱ e

۰۴

۱۶- اگر f و g متعلق به $R(\alpha)$ و در $[a, b]$ تعریف شده باشند کدام گزینه صحیح نیست؟

۰۴ $f + g \in R(\alpha)$

۰۳ $fg \in R(\alpha)$

۰۲ $fog \in R(\alpha)$

۰۱ $|f| \in R(\alpha)$

$$\int_a^b f^2(x) dx = 1$$

مقدار انتگرال

تابع f دارای مشتق پیوسته بر بازه $[a, b]$ است به طوری که $f(a) = f(b) = 0$ و

$$\int_a^b xf(x)f'(x) dx$$

برابر کدام گزینه است؟

۰۴ -۱

۰۳ $-\frac{1}{2}$

۰۲ ۱

۰۱ $\frac{1}{2}$

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: مبانی آنالیز ریاضی

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضیات و کاربردها، آمار و کاربردها، علوم کامپیوتر ۱۱۱۱۳۲۲

۱۸- در کدامیک از گزینه های زیر $f \notin R(\alpha)$

۱. اگر توابع f و α در نقطه x_0 از بازه $[a, b]$ از راست ناپیوسته باشند.

۲. اگر شرط ریمان برقرار باشد

۳. اگر تابع f بر بازه $[a, b]$ پیوسته و α بر $[a, b]$ صعودی باشد.

۴. اگر تابع f بر $[a, b]$ صعودی و α بر $[a, b]$ صعودی و پیوسته باشد.

۱۹- دنباله $\{f_n\}$ بر $[0, 1]$ با ضابطه $f_n(x) = \frac{\cos nx}{nx}$ تعریف شده است. کدام گزینه صحیح است؟

۱. این دنباله نقطه به نقطه به تابع $f=0$ همگرا است.

۲. این دنباله به طور یکنواخت به تابع $f=0$ همگرا است.

۳. این دنباله به طور یکنواخت به تابع $f=1$ همگرا است.

۴. این دنباله بر این بازه همگرا نیست.

۲۰- کدام گزاره در مورد سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{x+\frac{1}{2}}}$ برقرار است؟

۱. بر بازه $[0, \infty)$ به طور یکنواخت همگراست.

۲. بر R به طور یکنواخت همگراست.

۳. بر هیچ بازه ای به طور یکنواخت همگرا نیست.

۴. فقط بر بازه $(-\infty, 0]$ به طور یکنواخت همگراست.

سوالات تشریحی

۱.۴۰ نمره

۱- الف) ثابت کنید در فضای متریک (M, d) ، اگر M فشرده و $F \subseteq M$ بسته باشد آنگاه F فشرده است.

ب) ثابت کنید در فضای متریک (M, d) ، اگر F بسته و K فشرده باشد آنگاه $F \cap K$ فشرده است.

۱.۴۰ نمره

۲- تابع f از X به Y پیوسته است. ثابت کنید اگر $E \subseteq X$ همبند باشد آنگاه $f(E)$ همبند است.

۱.۴۰ نمره

۳- الف) نشان دهید به ازای هر عدد طبیعی n و هر عدد حقیقی و مثبت x ، $(1+x)^n \geq 1+nx$

ب) فرض کنید $f(x) = x + 2x^2 \sin \frac{1}{x}$ و $f(0) = 0$ نشان دهید $f'(0) = 1$.

۱.۴۰ نمره

۴- فرض کنید تابع کراندار f به غیر از تعداد متناهی نقطه از نقاط داخلی بازه $[a, b]$ پیوسته و تابع α در نقاط

ناپیوستگی f پیوسته باشد، در این صورت ثابت کنید $f \in R(\alpha)$.

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: مبانی آنالیز ریاضی

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضیات و کاربردها، آمار و کاربردها، علوم کامپیوتر ۱۱۱۱۳۲۲

۱۴۰ شماره

۵- الف) (شرط همگرایی یکنواخت کوشی). ثابت کنید شرط لازم و کافی برای آنکه $\{f_n\}$ بر E به طور یکنواخت همگرا باشد. ان است که $\forall \varepsilon \exists N \forall m, n, x (m, n \geq N, x \in E \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon)$