

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۴

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۷۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: یک ۱

عنوان درس: نظریه گراف و کاربردهای آن

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی) (۱۱۱۱۰۷۶ - ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۱۴۰۰)

۱-  $1 \leq a \leq 6$  عدد طبیعی مفروضی است و  $m$  و  $n$  به ترتیب تعداد یالها و رأسهای گراف مفروض  $G$  هستند که در شرط  $m \leq 3n - a$  صدق می کنند. با این شرایط کدام گزینه همواره صحیح است؟

۱. درجه هر رأس  $G$  حداقل ۶ است. ۲.  $G$  حداقل یک رأس مانند  $v$  دارد که  $\deg v = 6$ .

۳.  $G$  حداقل یک رأس مانند  $v$  دارد که  $\deg v \leq 5$ . ۴. درجه هر رأس  $G$  حداقل ۷ است.

۲- کدام یک از احکام زیر در مورد ماتریس وقوع یک گراف بدون طوقه در حالت کلی صحیح است؟

۱. مجموع اعداد هر سطر دقیقاً برابر ۲ است.

۲. مجموع اعداد هر ستون دقیقاً برابر ۲ است.

۳. مجموع کل درایه های ماتریس برابر تعداد یالهای گراف است.

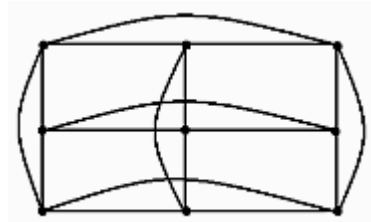
۴. مجموع اعداد هر ستون حداقل برابر ۲ است.

۳- اگر  $G$  گرافی مکعبی با  $p \geq 6$  رأس باشد آنگاه

۱.  $p$  عددی فرد است و  $G$  دقیقاً ۲ یال دارد. ۲.  $p$  عددی زوج است و  $G$  دقیقاً ۲ یال دارد.

۳.  $p$  عددی زوج است و  $G$  حداقل ۲ یال دارد. ۴.  $p$  عددی فرد است و  $G$  حداقل ۲ یال دارد.

۴- فرض کنید گراف  $G$  به صورت روبرو باشد، در این صورت کدام گزینه صحیح است؟



۴.  $G = K_4 \cup K_4$

۳.  $G = K_4[K_4]$

۲.  $G = K_4 + K_4$

۱.  $G = K_4 \times K_4$

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۴

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۷۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

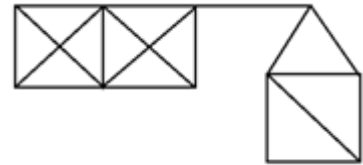
عنوان درس: نظریه گراف و کاربردهای آن

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی) (۱۱۱۰۷۶ - ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۴۰۰)

۵- در یک گروه دوستی ۶ نفره همواره داریم

۱. ۳ نفر وجود دارند که دو به دو همدیگر را می شناسند.
۲. ۳ نفر وجود دارند که هیچ یک دیگری را نمی شناسد.
۳. یا ۳ نفر وجود دارند که دو به دو همدیگر را می شناسند، یا ۳ نفر وجود دارند که هیچ یک دیگری را نمی شناسد.
۴. ۳ نفر وجود دارند که دو به دو همدیگر را می شناسند و ۳ نفر وجود دارند که هیچ یک دیگری را نمی شناسد.

۶- گراف شکل مقابل دارای چند دسته ماکسیمال است؟



۱. ۶ دسته      ۲. ۵ دسته      ۳. ۴ دسته      ۴. ۷ دسته

۷- کدام گزینه صحیح است؟

$$Spec(K_n) = \begin{pmatrix} n-1 & -1 \\ 1 & n-1 \end{pmatrix} \quad .۲$$

$$Spec(K_n) = \begin{pmatrix} n & -1 \\ 1 & n \end{pmatrix} \quad .۱$$

$$Spec(K_n) = \begin{pmatrix} n & 1 \\ 1 & n \end{pmatrix} \quad .۴$$

$$Spec(K_n) = \begin{pmatrix} n-1 & 1 \\ -1 & n-1 \end{pmatrix} \quad .۳$$

۸- فرض کنید  $G$  یک گراف ۴ رأسی و  $\chi(G, \lambda) = \lambda^4 - 5\lambda^2 - 6\lambda + 8$  در این صورت

۱.  $G$  دارای ۴ مثلث است.
۲.  $G$  دارای ۵ مثلث است.
۳.  $G$  دارای ۳ مثلث است.
۴.  $G$  دارای ۱ مثلث است.

۹- برای یک گراف  $k$ -منظم کدام گزینه صحیح است؟

۱. همواره  $k$  یک مقدار مشخصه با درجه تکرار یک است.
۲. قدر مطلق هر مقدار مشخصه حداقل برابر  $k$  است.
۳. قدر مطلق هر مقدار مشخصه حداکثر برابر  $k$  است.
۴. همواره  $k$  یک مقدار مشخصه با درجه تکرار دو است.

۱۰- اگر  $W$  ماتریس گردش با سطر اول  $[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]$  آنگاه حاصل  $\det(W - \lambda I)$  برابر است با

۱.  $(-1)^n (\lambda^n - 1)$
۲.  $(\lambda^n - 1)$
۳.  $(-1)^n (\lambda^n + 1)$
۴.  $(\lambda^n + 1)$

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۴

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۷۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: نظریه گراف و کاربردهای آن

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی) (۱۱۱۱۰۷۶ - ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۴۰۰)

۱۱- اگر  $G$  گراف ساده و  $k$ -منظمی با طیف  $Spec(G) = \begin{pmatrix} k & \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_s \\ 1 & m_1 & m_2 & \dots & m_s \end{pmatrix}$  باشد آنگاه

$$1. \quad Spec(L(G)) = \begin{pmatrix} k-2 & \lambda_1-2 & \lambda_2-2 & \dots & \lambda_s-2 & -2 \\ 1 & m_1 & m_2 & \dots & m_s & m-n \end{pmatrix}$$

$$2. \quad Spec(L(G)) = \begin{pmatrix} 2k-2 & \lambda_1+k-2 & \lambda_2+k-2 & \dots & \lambda_s+k-2 & -2 \\ 1 & m_1 & m_2 & \dots & m_s & m-n \end{pmatrix}$$

$$3. \quad Spec(L(G)) = \begin{pmatrix} 2k-1 & \lambda_1+k-1 & \lambda_2+k-1 & \dots & \lambda_s+k-1 & -1 \\ 1 & m_1 & m_2 & \dots & m_s & m-n \end{pmatrix}$$

$$4. \quad Spec(L(G)) = \begin{pmatrix} k & \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_s & -2 \\ 1 & m_1 & m_2 & \dots & m_s & m-n \end{pmatrix}$$

۱۲- عدد اشتراک گراف  $k_{r,4}$  برابر است با

۱۱ . ۴

۷ . ۳

۱۲ . ۲

۶ . ۱

۱۳- کدام گزینه صحیح است؟

۱. اگر  $G$  گرافی با  $n \geq 3$  رأس باشد، آنگاه  $G$  دارای دور هامیلتونی است اگر و تنها اگر برای هر دو رأس غیر مجاور  $x$  و  $y$  از آن داشته باشیم  $\deg x + \deg y \geq n$

$\frac{n-1}{2}$

۲. اگر  $G$  گرافی با  $n \geq 3$  رأس بوده که درجه یک رأس آن حداقل  $\frac{n-1}{2}$  باشد، آنگاه  $G$  دارای دور هامیلتونی است.

۳. هر گراف دوبخشی دارای دور هامیلتونی است.

۴. اگر  $G$  گرافی با  $n \geq 3$  رأس بوده و که برای هر دو رأس غیر مجاور  $x$  و  $y$  از آن داشته باشیم  $\deg x + \deg y \geq n$  آنگاه  $G$  دارای دور هامیلتونی است.

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۴

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۷۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: نظریه گراف و کاربردهای آن

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی) (۱۱۱۱۰۷۶ - ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۴۰۰)

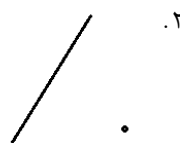
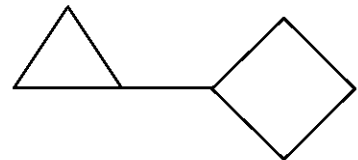
۱۴- کدام گزینه صحیح است؟

۱. برای هر  $n \geq 2$  گراف  $k_{n,n}$  هامیلتونی نیست.
۲. برای هر  $n \geq 2$  گراف  $k_{n,n}$  هامیلتونی است ولی  $k_{n,n+1}$  هامیلتونی نیست.
۳. برای هر  $n \geq 2$  گراف  $k_{n,n+1}$  هامیلتونی است.
۴. برای هر  $n \geq 2$  گراف  $k_{n,n}$  و  $k_{n,n+1}$  هامیلتونی نیستند.

۱۵- اگر در گراف همبند  $G$  یال  $x$  یک پل و  $v$  یک رأس برشی باشد آنگاه

۱. برای هر رأس  $u$  و  $w$  یال  $x$  روی هر مسیر بین  $u$  و  $w$  قرار دارد.
۲. برای هر رأس  $u$  و  $w$  رأس  $v$  روی هر مسیر بین  $u$  و  $w$  قرار دارد.
۳. رأسهای  $u$  و  $w$  وجود دارند که رأس  $v$  روی هیچ مسیر بین  $u$  و  $w$  قرار ندارد.
۴. رأسهایی مانند  $u$  و  $w$  وجود دارند که  $x$  روی هر مسیر بین  $u$  و  $w$  قرار دارد.

۱۶- گراف بلوکی گراف روبرو کدام است؟



۱۷- برای هر گراف همبند  $G$  همواره داریم

۲.  $k'(G) \leq k(G) \leq \delta(G)$

۱.  $k(G) \leq k'(G) \leq \delta(G)$

۴.  $\delta(G) \leq k(G) \leq k'(G)$

۳.  $\delta(G) \leq k'(G) \leq k(G)$

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۴

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۷۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: نظریه گراف و کاربردهای آن

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی) (۱۱۱۰۷۶ - ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۴۰۰)

۱۸- کدام گزینه صحیح است؟

$$1. \chi(K_n) = n - 1 \quad \chi(C_n) = \begin{cases} 2 & n = 2k \\ 3 & n = 2k + 1 \end{cases} \quad \text{همواره داریم:}$$

$$2. \chi(P_n) = 2, \quad \chi(C_n) = 2 \quad \text{همواره داریم:}$$

$$3. \chi(K_n) = n, \quad \chi(C_n) = \begin{cases} 2 & n = 2k \\ 3 & n = 2k + 1 \end{cases} \quad \text{همواره داریم:}$$

$$4. \chi(K_n) = n, \quad \chi(C_n) = 3 \quad \text{همواره داریم:}$$

۱۹- کدام گزینه صحیح است؟

۱. عدد تقاطع هر گراف ساده کامل برابر صفر و عدد تقاطع  $k_{3,4}$  برابر ۲ است.

۲. عدد تقاطع  $k_{3,4}$  برابر ۱ است و عدد تقاطع یک درخت همواره برابر صفر است.

۳. عدد تقاطع هر گراف ساده کامل برابر صفر است.

۴. عدد تقاطع یک درخت همواره برابر صفر و عدد تقاطع  $k_{3,4}$  برابر ۲ است.

۲۰- در هر گراف مسطح داریم:

۱. لزوماً رأسی با درجه ۴ وجود ندارد ولی این گراف ۴ رنگ پذیر است.

۲. لزوماً رأسی با درجه ۵ وجود ندارد ولی این گراف ۵ رنگ پذیر است.

۳. رأسی با درجه حداکثر ۴ وجود دارد و این گراف ۴ رنگ پذیر است.

۴. رأسی با درجه حداکثر ۵ وجود دارد و این گراف ۵ رنگ پذیر است.

### سوالات تشریحی

۲،۳۳ نمره

۱- الف) فرض کنید  $p, q, r$  به ترتیب تعداد راس‌ها و تعداد یال‌ها و تعداد ناحیه‌های یک نمایش گراف همبند و

مسطح  $G$  در صفحه، باشد ثابت کنید در این صورت  $p - q + r = 2$

اگر شرط همبندی از فرض قضیه حذف گردد و گراف  $G$  ناهمبند باشد در این صورت فرمول فوق به چه صورتی خواهد بود.

ب) ثابت کنید اگر  $G$  گرافی همبند ساده و مسطح با  $p$  راس ( $p \geq 3$ ) و  $q$  یال باشد آن گاه

$$q \leq 3p - 6$$

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۴

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۷۰ تشریحی: ۶۰

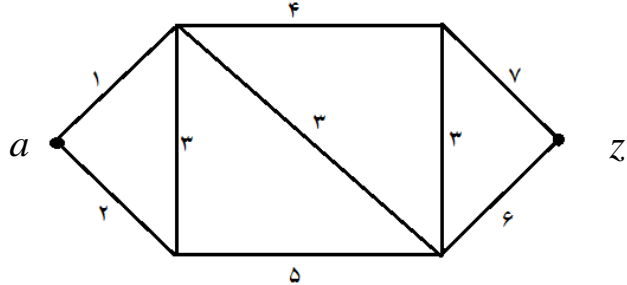
سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: نظریه گراف و کاربردهای آن

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی) (۱۱۱۱۰۷۶ - ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۱۴۰۰)

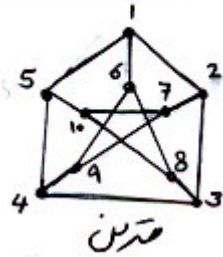
نمره ۱.۱۷

۲- با استفاده از الگوریتم کوتاهترین مسیر بین نقاط  $a$  و  $z$  را تعیین کنید. مراحل اجرای الگوریتم را بنویسید.



نمره ۱.۱۷

۳- عدد همبندی راسی  $k(G)$  و عدد همبندی یالی  $k'(G)$  را تعریف نمایید. عدد همبندی راسی و عدد همبندی یالی گراف  $k_n$  و پترسن را بیابید.



نمره ۲.۳۳

۴- عدد رنگی (عدد کروماتیک) گرافهای زیر را بیابید

