

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۷۵

سری سوال: یک ۱

عنوان درس: معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی) (۱۱۱۱۰۴۷) - ریاضیات و کاربردها (۱۱۱۱۳۲۸) - ژئوفیزیک-شاخه زلزله شناسی ۱۱۲۴۰۲۵

۱- مجموعه ساده از چند جمله ایها مانند $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ نسبت به تابع وزن W بر بازه (a, b) متعامد است هر گاه بازای هر عدد صحیح مثبت n و بازای هر $m = 0, 1, \dots, n-1$ داشته باشیم:

$$\int_a^b w(x) f_n(x) x^m dx = -1 \quad .2 \quad \int_a^b w(x) f_n(x) x^m dx = 1 \quad .1$$

$$\int_a^b w(x) f_n(x) x^m dx \neq 0 \quad .4 \quad \int_a^b w(x) f_n(x) x^m dx = 0 \quad .3$$

۲- کدام گزینه صحیح نمی باشد؟

۱. دو تابع f, g نسبت به تابع وزن W بر بازه (a, b) متعامد است هر گاه $(f, g) = 0$

۲. اگر دنباله $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ مجموعه ساده از چند جمله ایها باشند که نسبت به تابع وزن W بر بازه (a, b) متعامد باشند آنگاه هر چند جمله ای درجه n -ام f_n در بازه (a, b) دارای n ریشه متمایز است.

۳. دنباله $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ که در آن برای هر $f_n(x) = \sin(nx), 0 \leq x \leq \pi$ متعامد و ساده است

۴. برای هر دو تابع f, g داریم: $\|f + g\|^r = \|f\|^r + \|g\|^r$

۳- اگر دنباله $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ مجموعه ساده از چند جمله ایها باشند که نسبت به تابع وزن W بر بازه (a, b) متعامد باشند آنگاه

مقدار عبارت $(f_n(x), x^n)$ با فرض اینکه $f_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ برابر است با:

$$\|f_n(x)\| \quad .1 \quad \|f_n(x)\|^2 \quad .2 \quad \|f_n(x)\| \quad .3 \quad \frac{1}{a_n} \|f_n(x)\|^r \quad .4$$

۴- فرض کنید $g_0(x) = 1, g_1(x) = x, g_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$ ، در اینصورت ضرایب c_0, c_1, c_2 در رابطه

$$x^2 = c_0 g_0(x) + c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x)$$

$$c_0 = c_1 = c_2 = 1 \quad .1$$

$$c_0 = \frac{1}{3}, c_1 = 0, c_2 = 1 \quad .2$$

$$c_0 = 1, c_1 = \frac{1}{4}, c_2 = \frac{1}{2} \quad .4$$

$$c_0 = \frac{1}{4}, c_1 = \frac{1}{3}, c_2 = 1 \quad .3$$

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۷۵

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی) (۱۱۱۱۰۴۷ - ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۱۳۲۸ - ژئوفیزیک-شاخه زلزله شناسی ۱۱۲۴۰۲۵)

۵- اگر $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ یک مجموعه ساده از چند جمله ایهای متعامد باشد در اینصورت برای هر $n \geq 1$ داریم:

$$f_n(x) = f_{n+1}(x) + c_n f_{n-1}(x) \quad .1$$

$$x f_n(x) = A_n f_{n+1}(x) + B_n f_{n-1}(x) \quad .2$$

$$x f_n(x) = A_n f_{n+1}(x) + B_n f_n(x) \quad .3$$

$$x f_n(x) = A_n f_{n+1}(x) + B_n f_n(x) + C_n f_{n-1}(x) \quad .4$$

۶- تابع مولد چند جمله ای لژاندار کدام است؟

$$F(x, t) = (1 - 2xt + t^2)^{\frac{1}{2}} \quad .2$$

$$F(x, t) = (1 + xt^2)^{\frac{1}{2}} \quad .1$$

$$F(x, t) = 1 - 2xt + t^2 \quad .4$$

$$F(x, t) = (1 - 2xt + t^2)^{-\frac{1}{2}} \quad .3$$

۷- کدام یک از روابط زیر مربوط به فرمول رد ریگز در مورد چند جمله ایهای لژاندار است؟

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (x-1)^n \quad .2$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad .1$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad .4$$

$$P_n(x) = \frac{1}{n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad .3$$

۸- فرض کنید P_n ، n -مین چند جمله ای لژاندار باشد. حاصل $\int_{-1}^{+1} P_n^r(x) dx$ کدام است؟

۷ . ۴

$\frac{1}{2}$. ۳

$\frac{2}{2}$. ۲

$\frac{2}{2}$. ۱

۹- کدام یک از عبارات زیر در مورد چند جمله ایهای لژاندار P_n صحیح نمی باشد؟

$$P_n(-1) = (-1)^n \quad .2$$

$$P_{2n}(0) = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \quad .1$$

$$\int_{-1}^{+1} P_n^r(x) dx = \sqrt{\frac{2}{2n+1}} \quad .4$$

$$P_{2n+1}(0) = 0 \quad .3$$

تعداد سوالات: تستی: ۲۰، تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰، تشریحی: ۷۵

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی) (۱۱۱۱۰۴۷) - ریاضیات و کاربردها (۱۱۱۱۳۲۸) - ژئوفیزیک-شاخه زلزله شناسی ۱۱۲۴۰۲۵

۱۰- کدام یک از روابط زیر مربوط به فرمول ردیگز در مورد چند جمله ایهای لاگر است؟

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) \quad .2 \qquad L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n) \quad .1$$

$$L_n(x) = \frac{1}{\mu^n} e^x \cdot \frac{d^n}{dx^n} (x^n) \quad .4 \qquad L_n(x) = \frac{1}{\mu^n} e^x \cdot \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) \quad .3$$

۱۱- تابع مولد چند جمله ایهای هرمیت کدام است؟

$$F(x, t) = \exp[1 - \mu xt - t^2] \quad .2 \qquad F(x, t) = \exp[1 + \mu xt + t^2] \quad .1$$

$$F(x, t) = \exp[\mu xt - t^2] \quad .4 \qquad F(x, t) = \exp[1 - \mu xt] \quad .3$$

$$\begin{cases} u'' + u = 0 & -12 \\ u(0) = 0 \\ u(\pi) = 0 \end{cases} \quad \text{جواب غیر بدیهی مساله با مقدار اولیه کدام است؟}$$

$$u(x) = c(x - \pi) \sin x \quad .2 \qquad u(x) = c \sin x \quad .1$$

$$u(x) = \cosh(x) \quad .4 \qquad u(x) = c \cos x \quad .3$$

۱۳- جواب مساله $\frac{d^2 u}{dx^2} + \pi^2 u = 2x - 1$ با شرایط $u(0) = 0$ و $u(1) = 0$ کدام است؟

$$u(x) = \frac{1}{\pi^2} \cos \pi x + \frac{2x-1}{\pi^2} \quad .2 \qquad u(x) = \frac{1}{\pi^2} \cos \pi x + c \sin \pi x + \frac{2x-1}{\pi^2} \quad .1$$

$$u(x) = \frac{1}{\pi^2} \sin \pi x + \frac{2x-1}{\pi^2} \quad .4 \qquad u(x) = \frac{1}{\pi^2} \cos x + c \sin x \quad .3$$

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۷۵

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی) (۱۱۱۰۴۷) - ریاضیات و کاربردها (۱۱۱۳۲۸) - ژئوفیزیک-شاخه زلزله شناسی ۱۱۲۴۰۲۵

۱۴- کدام یک از احکام زیر نادرست است؟

۱. همه مقادیر ویژه یک مسأله خود الحاق حقیقی هستند.

۲. مقادیر یک مسأله خود الحاق یک دنباله بینهایت مرتب را تشکیل میدهند که از لحاظ اندازه صعودی میباشند.

۳. مسأله
$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(\pi) = 0 \end{cases}$$
 مقادیر ویژه منفی ندارد.

۴.
$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(\pi) = 0 \end{cases}$$
 یک مقدار ویژه مسأله $\lambda = 0$ است.

۱۵- تابع دلخواه f که بر بازه $[a, b]$ تعریف شده است را در نظر بگیرید. فرض کنیم $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک مجموعه متعامد از

توابع بر بازه (a, b) با تابع وزن w باشد. ضرایب فوریه تابع f نسبت به مجموعه متعامد $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ کدام است؟

۱. $C_n = \frac{(f, \phi_n)}{\|\phi_n\|}$ ۲. $C_n = \|\phi_n\|$ ۳. $C_n = (f, \phi_n)$ ۴. $C_n = \frac{(f, \phi_n)}{\|\phi_n\|^2}$

۱۶- مقدار انتگرال $\int_0^{\infty} \frac{\cos s \sin s}{s} ds$ کدام است؟

۱. $\frac{\pi}{2}$ ۲. $\frac{\pi}{2}$ ۳. $-\frac{\pi}{4}$ ۴. $\frac{\pi}{4}$

۱۷- انتگرال فوریه کسینوسی تابع $f(x) = e^{-x}$ برای $x \geq 0$ کدام است؟

۱. $\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos xt}{1+x^2} dt$ ۲. $\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos xt}{1+t^2} dt$ ۳. $\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos xt}{t^2+x^2} dt$ ۴. $\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} \cos xt}{1+e^{-t}} dt$

۱۸- جواب معادله همگن ${}^2Z_x - {}^3Z_y = 0$ کدام است؟

۱. $Z_h = f(-3x - 2y)$ ۲. $Z_h = f(-3x + 2y)$ ۳. $Z_h = f(3x - 2y)$ ۴. $Z_h = f(3x + 2y)$

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۷۵

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی، معادلات دیفرانسیل بامشتقات جزئی

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی) (۱۱۱۱۰۴۷) - ریاضیات و کاربردها (۱۱۱۱۳۲۸) - ژئوفیزیک-شاخه زلزله شناسی ۱۱۲۴۰۲۵

۱۹- معادله $yz_{xx} + (x+y)z_{xy} + xz_{yy} = 0$ خارج از خط $y = x$ کدام است؟

۱. فقط یک نقطه است
۲. بیضی
۳. سهمی
۴. هذلولی

۲۰- کدام گزینه مربوط به معادله موج یک بعدی میباشد؟

۱. $u_{tt} = -c^2 u_{tt}$, $c^2 = \frac{p_0}{p}$
۲. $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, $c^2 = \frac{\rho}{T_0}$
۳. $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, $c^2 = \frac{T_0}{\rho}$
۴. $u_{tt} = -c^2 u_{xx}$, $c^2 = \frac{\rho}{T_0}$

سوالات تشریحی

۱.۴۰ نمره

۱- نشان دهید مجموعه چند جمله ایهای $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ نسبت به تابع وزن $w = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ بر بازه $(-1,1)$ متعامدند و برای هر عدد طبیعی n داریم: $\|T_n(x)\|^2 = \frac{\pi}{2}$, $\|T_0\|^2 = \pi$

۱.۴۰ نمره

۲-
$$\begin{cases} Ly = \mu r(x)y = 0 \\ u_1(y) = 0 \\ u_p(y) = 0 \end{cases}$$
 فرض کنید μ_1, μ_p دو مقدار ویژه مساله

و توابع y_1, y_p توابع ویژه متناظر آنها باشند. اگر این مساله خود الحاق باشد ثابت کنید y_1, y_p نسبت به تابع وزن r بر بازه $[a,b]$ متعامد هستند.

۱.۴۰ نمره

۳- سری فوریه تابع $f(x) = |x|, -\pi \leq x \leq \pi$ را بر حسب مجموعه توابع متعامد $\{1, \cos(nx), \sin(nx)\}_{n=1}^{\infty}$ پیدا کنید.

۱.۴۰ نمره

۴- سطح انتگرالی از معادله $z^2 - 1 = (y+xz)p + (x+yz)q$ که از سهمی $z = t^2, y = 1, x = t$ می گذرد را پیدا کنید.

۱.۴۰ نمره

۵- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $Z_{xx} - Z_{xy} - Z_x + Z_y = 2 \cos(3x + 2y)$ را پیدا کنید.