

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: یک ۱

عنوان درس: آنالیز ریاضی، آنالیز ریاضی ۳

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی)، ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (جبر)، ریاضی محض (هندسه) ۱۱۱۱۰۴۶ -، ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۱۴۳۲

۱- فرض کنید V و W دو فضای برداری نرم‌دار و T یک تبدیل خطی از V به W باشد. نگاه:

۱. T در صفر پیوسته است.

۲. T در هر نقطه از V پیوسته است.

۳. T در صفر پیوسته است اگر و فقط اگر در هر نقطه از V پیوسته باشد.

۴. تبدیل خطی T کراندار است.

۲- $L(V, W)$ فضای تبدیلات خطی از V به W است اگر $T \in L(V, W)$ در این صورت

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| \mid \|x\| = 1\}$$

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| \mid \|x\| \leq 1\}$$

۴. هر سه مورد صحیح است

$$\|Tx\| \leq \|T\| \text{ برای } \|x\| \leq 1$$

۳- اگر $T \in L(V)$ که V فضایی برداری و نرم‌دار است کدام گزینه غلط است؟

۱. T کراندار است اگر و فقط اگر T پیوسته باشد.

۲. T کراندار یعنی $M \geq 0$ موجود است بطوریکه $|T(x)| \leq M$ برای هر $x \in V$

۳. T کراندار است اگر و فقط اگر T در صفر پیوسته باشد.

۴. مجموعه عملگرهای وارون پذیر روی V زیر مجموعه بازی از V است

۴- فرض کنید $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ با ضابطه، $f(x, y) = (x^2 + y^2, 2xy)$ تعریف شود. کدام گزینه غلط است؟

۲. ماتریس جاکوبی f در هر نقطه موجود است

۱. f تابعی مشتق پذیر بر \mathbb{R}^2 است.

۴. ژاکوبین f در هر نقطه مخالف صفر است.

$$Df(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix}$$

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: آنالیز ریاضی، آنالیز ریاضی ۳

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی)، ریاضی (محض (آنالیز)، ریاضی (محض (جبر)، ریاضی (محض (هندسه) ۱۱۱۱۰۴۶ -، ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۴۳۲

۵- کدام گزینه صحیح است؟

۱. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ بر \mathbb{R} مشتق پذیر است لذا برای هر a و b نقطه ای مانند $z \in [a, b]$ موجود است بطوریکه:

$$f(b) - f(a) = f(z)(b - a)$$

۲. $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ بر \mathbb{R}^n مشتق پذیر است بطوریکه $\|Df(x)\| \leq M$ به ازای هر $x \in \mathbb{R}^n$ انگاه

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

۳. $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ بر \mathbb{R}^n مشتق پذیر است و اگر $\|Df(a)\| \leq M$ برای هر $a \in \mathbb{R}^n$ انگاه

$$|f(a) - f(b)| \leq M|b - a|$$

۴. هر سه مورد فوق صحیح است.

۶- تابع $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ به صورت زیر تعریف شده است

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^3 \\ x_1^4 - x_2^6 \end{pmatrix} \text{ اگر } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \text{ و در } (0, 0) \text{ صفر تعریف شده است در این صورت:}$$

۱. تابع f در $(0, 0)$ پیوسته است.

۲. مشتق سوئی تابع در $(0, 0)$ برای هر بردار واحد u برابر صفر است.

۳. تابع f در $(0, 0)$ مشتق پذیر است.

۴. تابع f در $(0, 0)$ مشتق پذیر است ولی در امتداد بعضی بردارهای واحد در $(0, 0)$ مشتق سوئی ندارد.

۷- اگر X یک فضای متریک کامل و $f: X \rightarrow Y$ یک نگاشت انقباض باشد انگاه

۱. به ازای هر $x \in X$ ، $f(x) \neq x$

۲. به ازای $0 < \alpha < 1$ $d(x, y) \leq \alpha d(f(x), f(y))$

۳. تابع دارای یک نقطه ثابت منحصر به فرد است.

۴. تابع پیوسته نیست.

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: آنالیز ریاضی، آنالیز ریاضی ۳

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی)، ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (جبر)، ریاضی محض (هندسه) ۱۱۱۱۰۴۶ -، ریاضیات و کاربرددها ۱۱۱۱۴۳۲

۸- بنا بر قضیه تابع معکوس داریم:

۱. یک نگاشت به طور پیوسته مشتق پذیر f در یک همسایگی از هر نقطه X متعلق به قلمرو خود معکوس پذیر است
۲. یک نگاشت به طور پیوسته مشتق پذیر در یک همسایگی از هر نقطه X متعلق به قلمرو خود که $f'(X) \neq 0$ معکوس پذیر است.
۳. یک نگاشت به طور پیوسته مشتق پذیر f که $f'(X) \neq 0$ (برای هر X واقع در دامنه f) معکوس پذیر است.
۴. یک نگاشت به طور پیوسته مشتق پذیر وارون پذیر است.

۹- کدام گزینه غلط است؟

۱. هر گاه f یک نگاشت C^1 از $D \subseteq \mathbb{R}^n$ به \mathbb{R}^n و $f'(x)$ به ازای هر $x \in D$ وارون پذیر باشد f نگاشتی باز است
۲. بنابر قضیه رتبه رفتار یک نگاشت به طور پیوسته مشتق پذیر f در مجاورت نقطه X از قلمرو خود با رفتار تبدیل خطی $f'(X)$ شبیه است
۳. هر گاه $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ تابعی مشتق پذیر باشد و برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ $f'(x) \neq 0$ باشد آنگاه f تابعی وارون پذیر است
۴. هر گاه $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی مشتق پذیر باشد آنگاه f لزوماً تابعی وارون پذیر نیست

۱۰- اگر $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ به صورت $f(x, y, z) = e^x + y^2 + z^2$ آنگاه $Df(2, 0, 1)$ کدام است؟

۱. $(e^2, 0, 2)$
۲. $4e^2 + 2$
۳. $(4e^2, 0, 2)$
۴. هیچکدام

۱۱- فرض کنید $f: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ به صورت زیر باشد:

در بازه $f(x, y) = 0, \left[0, \frac{1}{2}\right]$ و در بازه $f(x, y) = 1, \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ در این صورت:

۱. f انتگرال پذیر نیست
۲. f انتگرال پذیر است و $\int_{[0,1] \times [0,1]} f = \frac{1}{2}$
۳. f انتگرال پذیر است و $\int_{[0,1] \times [0,1]} f = 0$
۴. هیچکدام

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: آنالیز ریاضی، آنالیز ریاضی ۳

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی)، ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (جبر)، ریاضی محض (هندسه) ۱۱۱۱۰۴۶ -، ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۴۳۲

۱۲- کدام گزینه غلط است؟

۰.۱ هر مجموعه متناهی در \mathbb{R}^n دارای اندازه صفر است

۰.۲ اگر قدر مجموعه $A \subset \mathbb{R}^n$ صفر باشد، اندازه A هم صفر است

۰.۳ اگر A فشرده و با اندازه صفر باشد، قدر A هم صفر است

۰.۴ هر مجموعه با اندازه صفر دارای قدر صفر است

۱۳- اگر V یک فضای برداری باشد در این صورت:

۰.۱ V^* فضای ۱- تانسورها است

۰.۲ اگر $V = \mathbb{R}^k$ باشد ضرب نقطه ای یک ۱- تانسور است

۰.۳ اگر $V = \mathbb{R}^k$ باشد ضرب نقطه ای یک ۲- تانسور است

۰.۴ موارد ۱ و ۳

۱۴- اگر V یک فضای برداری باشد و T یک P - تانسور متناوب باشد انگاه:

۰.۱ $\text{Alt}(T) = 0$

۰.۲ $\text{Alt}(T) = T$

۰.۳ $T \otimes T$ متناوب است.

۰.۴ $\text{Alt}(T \otimes T) = T \otimes T$

۱۵- در صورتی که: $dW = \omega_{X_1} dX_1 \wedge dX_3 + \epsilon_{X_2 X_3} dX_2 \wedge dX_1$ باشد داریم:

۰.۱ W یک فرم ۲-بعدی اساسی است.

۰.۲ $W = \omega_{X_1} dX_1 \wedge dX_3 + \epsilon_{X_2 X_3} dX_2 \wedge dX_3$

۰.۳ $dW = 0$

۰.۴ $dW = \epsilon_{X_2} dX_1 \wedge dX_2 \wedge dX_3$

۱۶- اگر W یک P - فرم هموار روی زیر مجموعه \mathbb{R}^k باشد کدام گزینه غلط است؟

۰.۱ $ddW = 0$

۰.۲ dW یک $p-1$ فرم است.

۰.۳ dW یک $p+1$ فرم است.

۰.۴ اگر $k \leq p$ انگاه $dW = 0$

۱۷- اگر Q^k یک سادک k - بعدی باشد انگاه:

۰.۱ Q^0 شامل یک نقطه و یک راس است.

۰.۲ Q^2 دارای دو راس و دو وجه است.

۰.۳ Q^3 شامل سه راس و سه وجه است.

۰.۴ Q^1 شامل ۱ راس و یک نقطه است.

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: آنالیز ریاضی، آنالیز ریاضی ۳

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی)، ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (جبر)، ریاضی محض (هندسه) ۱۱۱۱۰۴۶ -، ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۱۴۳۲

۱۸- فرض کنید W یک k -فرم در مجموعه باز $E \subset \mathbb{R}^n$ باشد کدام گزینه غلط است؟

۱. هرگاه $dW = 0$ باشد W را یک فرم کامل نامیم.
۲. اگر W یک فرم کامل باشد آنگاه $dW = 0$
۳. اگر W یک K -فرم بسته در E باشد انتگرال آن روی زنجیرهای K بعدی که مرز زنجیرهای $k+1$ بدی در E اند صفر است.
۴. اگر $dW = 0$ آنگاه W را یک فرم بسته می نامند.

۱۹- فرض کنید V و W دو فضای برداری با ابعاد m و n باشند و T یک تبدیل خطی از V به W باشد آنگاه

۱. ماتریس نمایش تبدیل خطی T یک ماتریس $n \times m$ است.
۲. ماتریس نمایش تبدیل خطی T یک ماتریس $m \times n$ است.
۳. مشتق تبدیل خطی T در هر نقطه ثابت است.
۴. ماتریس نمایش تبدیل خطی T وارون دارد.

۲۰- هرگاه $\|\cdot\|_1$ ، $\|\cdot\|_p$ دو نرم معادل روی فضای برداری V باشند کدام گزینه غلط است؟

۱. نگاهت همانی از $\|\cdot\|_1$ ، $\|\cdot\|_p$ به $\|\cdot\|_p$ ، V همیو مورفیزم است
۲. مفاهیم مجموعه باز-بسته-فشرده-همبند نسبت به متریک القایی از این دو نرم یکی است.
۳. چون دو نرم معادلند فضای V متناهی البعد است.
۴. اگر بعد V متناهی باشد تمام نرمها روی آن معادلند.

سوالات تشریحی

۱.۴۰ نمره

۱- اگر V یک فضای برداری نرم دار و $L(V)$ فضای تبدیلات خطی کراندار روی V باشد نشان دهید مجموعه تمام عملگرهای وارون پذیر روی V مجموعه ای باز از $L(V)$ است.

۱.۴۰ نمره

۲- فرض کنید تابع f مجموعه باز و محدب $D \subseteq \mathbb{R}^n$ را به توی \mathbb{R}^m بنگارد، f مشتق پذیر باشد و برای هر $x \in D$ داریم $\|Df(x)\| \leq M$ در این صورت به ازای هر $a, b \in D$

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M \|b - a\|$$

۱.۴۰ نمره

۳- قضیه افراز واحد را بیان و اثبات کنید

۱.۴۰ نمره

۴- مجموعه ای با اندازه صفر معرفی کنید که دارای قدر صفر نباشد و ادعای خود را اثبات کنید.



تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: آنالیز ریاضی، آنالیز ریاضی ۳

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی)، ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (جبر)، ریاضی محض (هندسه) ۱۱۱۱۰۴۶ - ریاضیات و

کاربردها ۱۱۱۱۴۳۲

۵- لم پوانکاره را در خصوص ارائه شرط کافی برای فرمهای بسته که آنها را به فرمهای کامل تبدیل گرداند بیان و اثبات کنید.

۱۴۰ شماره