

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: یک ۱

عنوان درس: آنالیز ریاضی ۱، آنالیز ریاضی ۱

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی)، ریاضی کاربردی (آنالیز عددی)، ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (جبر)، ریاضی محض  
هندسه، ریاضی کاربردی (تحقیق در عملیات) (۱۱۱۱۰۳۸ - آمار، آمار ریاضی ۱۱۱۱۰۸۷ - آموزش ریاضی ۱۱۱۱۲۸۶)

۱- کدام گزینه درست است.

۱. Q در R چگال است.  
۲. اصل کمال در مجموعه اعداد گویا برقرار است.  
۳. در اعداد حقیقی خاصیت ارشمیدسی برقرار نیست.  
۴. اگر p عددی اول باشد، آنگاه  $\sqrt{p}$  گویا است.

۲- فرض کنید  $\left\{ \frac{(-1)^n}{1 + \frac{1}{n}} \right\}$  یک دنباله باشد مقدار حد پایین این دنباله برابر است با

۱. ۱      ۲. -۱      ۳. e      ۴. -e

۳- اگر  $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x > 0, x^2 > 2\}$  آنگاه کدام گزینه درست است؟

۱.  $\sup A = -\sqrt{2}$   
۲.  $\sup A$  موجود نیست.  
۳.  $\inf A = 0$   
۴.  $\inf A$  موجود نیست.

۴- کدامیک از سریهای زیر همگراست؟

۱.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$   
۲.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$   
۳.  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$   
۴.  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt{\log n}}$

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: آنالیز ریاضی ۱، آنالیز ریاضی ۱

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی)، ریاضی کاربردی (آنالیز عددی)، ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (جبر)، ریاضی محض (هندسه)، ریاضی کاربردی (تحقیق در عملیات) (۱۱۱۱۰۳۸ - آمار، آمار ریاضی ۱۱۱۱۰۸۷ - آموزش ریاضی ۱۱۱۱۲۸۶)

۵- در مورد سری نامنفی  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  کدام گزینه درست است؟

۱. اگر  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ ، آنگاه سری واگراست.

۲. اگر  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ ، آنگاه سری همگراست.

۳. اگر  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) < 1$ ، آنگاه سری همگراست.

۴. اگر  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) > 1$ ، آنگاه سری همگراست.

۶- کدام گزاره درست است؟

۱. سری نامنفی  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  همگرا است اگر و فقط اگر دنباله  $\{a_n\}$  کراندار باشد.

۲. سری توافقی  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$  به ازای  $a \leq 1$  همگرا و به ازای  $a > 1$  واگراست.

۳. سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a^n}$  برای  $a > 1$  همگرا و برای  $0 < a < 1$  واگراست.

۴. اگر  $\{a_n\}$  نامنفی باشد  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  همگراست اگر و فقط اگر  $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$  همگرا باشد.

۷- در فضای متریک  $(M, d)$  کدام حکم برقرار است؟

۱. اشتراک هر خانواده از مجموعه های باز، باز است.

۲. اجتماع هر خانواده از مجموعه های بسته، بسته است.

۳. اجتماع هر خانواده از مجموعه های باز، بسته است.

۴. اشتراک هر خانواده از مجموعه های بسته، بسته است.

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: آنالیز ریاضی ۱، آنالیز ریاضی ۱

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی)، ریاضی (کاربردی) (آنالیز عددی)، ریاضی (محض) (آنالیز)، ریاضی (محض) (جبر)، ریاضی (محض) (هندسه)، ریاضی (کاربردی) (تحقیق در عملیات) (۱۱۱۱۰۳۸ - آمار، آمار ریاضی ۱۱۱۱۰۸۷ - آموزش ریاضی ۱۱۱۱۲۸۶)

۸- فرض کنید  $M$  یک فضای متریک و  $A$  زیرفضایی از آن باشد. در این صورت  $C \subseteq A$  در  $A$  بسته است اگر و فقط اگر ...

۱. مجموعه بسته ای مانند  $F$  در  $M$  بتوان یافت که  $C = A \cap F$
۲. مجموعه بسته ای مانند  $F$  در  $M$  بتوان یافت که  $F = A \cap C$
۳. مجموعه بسته ای مانند  $F$  در  $M$  بتوان یافت که  $F = A \cup C$
۴. مجموعه فشرده ای مانند  $K$  در  $M$  بتوان یافت که  $C = A \cap K$

۹- در فضای متریک  $(M, d)$  کدام گزاره نادرست است؟

۱. اگر  $A \subseteq M$  بسته و کراندار انگه  $A$  فشرده است.
۲. اگر  $F$  بسته و  $K$  فشرده انگه  $F \cap K$  فشرده است.
۳. اگر  $M$  فشرده باشد انگه هر زیرمجموعه نامتناهی  $E$  از  $M$  دارای یک نقطه انباشتگی در  $M$  است.
۴. اگر  $A \subseteq M$  فشرده باشد انگه  $A$  بسته است.

۱۰- کدامیک از گزاره های زیر درست است؟

۱. هر مجموعه متناهی فشرده نیست.
۲.  $(0, 1)$  فشرده نیست.
۳. در  $(R, d)$ ،  $d$  متریک معمولی،  $Q$  در  $R$  فشرده است.
۴. در  $(R, d)$ ،  $d$  متریک معمولی،  $R$  فشرده است.

۱۱- اگر  $E = (1, 2) \cup \{7\}$  انگه  $E^\circ$  عبارتست از

۱.  $(1, 2) \cup \{7\}$
۲.  $(1, 2)$
۳.  $[1, 2] \cup \{7\}$
۴.  $[1, 2]$

۱۲- کدام عبارت درست است.

۱. اگر  $A$  و  $B$  همبند باشند انگه  $A \cup B$  همبند است.
۲. اگر  $A_1$  و  $A_2$  همبند باشند و  $A_1 \subseteq B \subseteq A_2$ ،  $B$  همبند است.
۳. اگر  $A$  همبند باشد انگه  $\bar{A}$  همبند است.
۴. بازه  $[0, 1]$  در  $(R, d)$  با متریک گسسته همبند است.

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: آنالیز ریاضی ۱، آنالیز ریاضی ۱

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی)، ریاضی (کاربردی) (آنالیز عددی)، ریاضی (محض) (آنالیز)، ریاضی (محض) (جبر)، ریاضی (محض) (هندسه)، ریاضی (کاربردی) (تحقیق در عملیات) (۱۱۱۱۰۳۸ - آمار، آمار ریاضی ۱۱۱۱۰۸۷ - آموزش ریاضی ۱۱۱۱۲۸۶)

۱۳- فرض کنید  $f$  تابعی حقیقی و پیوسته بر فضای متریک باشد قرار میدهیم  $Z(f) = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$  در این صورت کدام عبارت در مورد  $Z(f)$  درست است؟

۱. نه بسته و نه باز است. ۲. بسته است. ۳. باز است. ۴. هیچکدام

۱۴- اگر  $f$  و  $g$  پیوسته یکنواخت باشند، کدام تابع پیوسته یکنواخت است؟

۱.  $\frac{f}{g}$  ۲.  $f + g$  ۳.  $\frac{1}{g}$  ۴.  $fg$

۱۵- اگر  $(X, d_X)$  و  $(Y, d_Y)$  دو فضای متریک و  $f: X \rightarrow Y$  پیوسته باشد آنگاه کدام گزینه درست است؟

۱. اگر  $E \subseteq X$  فشرده آنگاه  $f(E)$  فشرده است.  
۲.  $f$  سوپریم و اینفیمم مقادیر خود را در نقطه ای از  $X$  می گیرد.  
۳. اگر  $A \subseteq X$  باز آنگاه  $f(A)$  باز است.  
۴.  $f^{-1}$  پیوسته است.

۱۶- اگر  $A \subseteq \mathbb{R}$  و  $A$  مجموعه ای نافشرده باشد آنگاه

۱. هر تابع پیوسته بر  $A$  کراندار است.  
۲. هر تابع پیوسته و کراندار بر  $A$  ماکسیمم دارد.  
۳. اگر  $A$  کراندار باشد، تابعی پیوسته بر  $A$  هست که پیوسته یکنواخت نیست.  
۴. هر تابع پیوسته بر  $A$ ، می نیمم خود را بر این مجموعه اختیار می کند.

۱۷- اگر  $f(x) = \begin{cases} \sin x & x \in \mathbb{Q} \\ \cos x & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$  تابع  $f$  در چه نقاطی پیوسته است؟

۱.  $x = 2k\pi - \frac{\pi}{4}$  ۲.  $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$  ۳.  $x = k\pi + \frac{\pi}{6}$  ۴.  $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: آنالیز ریاضی ۱، آنالیز ریاضی ۱

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی)، ریاضی (کاربردی) (آنالیز عددی)، ریاضی (محض) (آنالیز)، ریاضی (محض) (جبر)، ریاضی (محض) (هندسه)، ریاضی (کاربردی) (تحقیق در عملیات) (۱۱۱۰۳۸ - آمار، آمار ریاضی ۱۱۱۰۸۷ - آموزش ریاضی ۱۱۱۲۸۶)

۱۸- کدامیک از توابع زیر در  $x = 0$  مشتق پذیر نیست؟

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad .۲$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad .۱$$

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad .۴$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad .۳$$

۱۹-  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{3x})^x$  برابر است با:

۱.  $\infty$     ۲.  $e$     ۳.  $1$     ۴. حد وجود ندارد.

۲۰- فرض کنیم  $n \geq 1$  و تابع  $f$  دارای مشتق مرتبه  $n$ ام و پیوسته بر بازه  $(a, b)$  باشد و در نقطه ای مانند  $c$  از  $f^{(n)}(c) \neq 0$  و  $f'(c) = f''(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0$ ،  $(a, b)$  در اینصورت

۱. اگر  $n$  فرد، انگاه  $c$  نقطه مینیمم و ماکسیمم موضعی نیست.
۲. اگر  $n$  زوج، انگاه  $c$  نقطه مینیمم و ماکسیمم موضعی نیست.
۳. اگر  $n$  زوج، انگاه در حالت  $f^{(n)}(c) > 0$  تابع  $f$  در نقطه  $c$  دارای ماکسیمم موضعی است.
۴. اگر  $n$  فرد، انگاه در حالت  $f^{(n)}(c) < 0$  تابع  $f$  در نقطه  $c$  دارای ماکسیمم موضعی است.

### سوالات تشریحی

۱- الف) صورت قضیه (ددکیند) را بیان کنید.

ب) با فرض برقراری قضیه (ددکیند)، نشان دهید اگر  $L$  یک زیر مجموعه غیر تهی از اعداد حقیقی واز بالا کراندار باشد، آن گاه  $L$  سوپریمم دارد.

۱.۴۰ نمره

۲- فرض کنید سری نامنفی  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  همگرا باشد. نشان دهید سریهای  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  و  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$  نیز همگرا هستند.

۱.۴۰ نمره

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: آنالیز ریاضی ۱، آنالیز ریاضی ۱

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی)، ریاضی (کاربردی) (آنالیز عددی)، ریاضی (محض) (آنالیز)، ریاضی (محض) (جبر)، ریاضی (محض) (هندسه)، ریاضی (کاربردی) (تحقیق در عملیات) (۱۱۱۰۳۸ - آمار، آمار ریاضی ۱۱۱۰۸۷ - آموزش ریاضی ۱۱۱۲۸۶)

نمره ۱.۴۰

۳- الف) قضیه هاینه-بورل را بیان و اثبات کنید.

ب) ثابت کنید  $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n = 1, 2, \dots \right\} \cup \{0\}$  در  $\mathbb{R}$  فشرده است.

نمره ۱.۴۰

۴- فرض کنید  $X$  و  $Y$  دو فضای متریک و  $f$  تابعی پیوسته از  $X$  به  $Y$  باشد. ثابت کنید اگر  $F \subseteq X$  فشرده باشد، ان گاه  $f(F)$  فشرده است.

نمره ۱.۴۰

۵- الف) قضیه (میانگین تعمیم یافته): ثابت کنید اگر دو تابع حقیقی مقدار  $f$  و  $g$  بر  $[a, b]$  پیوسته و بر  $(a, b)$  مشتق پذیر باشند، ان گاه نقطه ای مانند  $c$  وجود دارد به طوری که

$$(f(b) - f(a))g'(c) = g(b) - g(a)f'(c)$$

ب) فرض کنید  $f$  به ازای هر  $x > 0$  تعریف شده و مشتق پذیر باشد و  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$  قرار میدهم

$g(x) = f(x+1) - f(x)$  ثابت کنید  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$  (راهنمایی: قضیه مقدار میانگین را به کار ببرید)