تعداد سوالات : تستی : ۲۰ تشریحی : ۵ **زمان آزمون (دقیقه) : تستی : ۶۰ تشریحی : ۶۰** **سری سوال : یک ۱**

عنـــوان درس: آنالیز ریاضی ۱،آنالیزریاضی ۱

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)،ریاضی (کاربردی)،ریاضی کاربردی (آنالیزعددی)،ریاضی محض (آنالیز)،ریاضی محض (جبر)،ریاضی محض هندسه)،ریاضی کاربردی (تحقیق درعملیات) ۱۱۱۱۰۳۸ - ،آمار،آمارریاضی ۱۱۱۱۰۸۷ - ،آموزش ریاضی۱۱۱۱۲۸۶)

۱- کدام گزینه درست است.

۱. Q در R چگال است.

۲. اصل کمال در مجموعه اعداد گویا برقرار است.

۳. در اعداد حقیقی خاصیت ارشمیدسی برقرارنیست.

۴. اگر p عددی اول باشد، آنگاه $\sqrt{p}$ گویا است.

۲- فرض کنید $\left\{\dfrac{(-1)^n}{1+\frac{1}{n}}\right\}$ **یک دنباله باشد مقدار حد پایین این دنباله برابراست با**

۱. ۱

۲. ۱-

۳. e

۴. $-e$

۳- اگر $A=\{x \mid x\in R, x>0, x^2>2\}$ **انگاه کدام گزینه درست است؟**

۱. $\sup A=-\sqrt{2}$

۲. $\sup A$ موجود نیست.

۳. $\inf A=0$

۴. $\inf A$ موجود نیست.

۴- کدامیک از سریهای زیرهمگراست؟

۱. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

۲. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$

۳. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(\log n)^n}$

۴. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{\log n}}$

۵- در مورد سری نامنفی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ کدام گزینه درست است؟

۱. اگر $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ ، آنگاه سری واگراست.

۲. اگر $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ ، آنگاه سری همگراست.

۳. اگر $\lim_{n\to\infty} n(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}) < 1$ ، آنگاه سری همگراست.

۴. اگر $\lim_{n\to\infty} n(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}) > 1$ ، آنگاه سری همگراست.

۶- کدام گزاره درست است؟

۱. سری نامنفی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا است اگر و فقط اگر دنباله $\{a_n\}$ کراندار باشد.

۲. سری توافقی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ به ازای $a \le 1$ همگرا و به ازای $a > 1$ واگراست.

۳. سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a^n}$ برای $a > 1$ همگرا وبرای $0 < a < 1$ واگراست.

۴. اگر $\{a_n\}$ نامنفی باشد $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست اگر و فقط اگر $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ همگرا باشد.

۷- در فضای متریک (M,d) کدام حکم برقرار است؟

۱. اشتراک هر خانواده از مجموعه های باز ،باز است.

۲. اجتماع هر خانواده از مجموعه های بسته ،بسته است.

۳. اجتماع هر خانواده از مجموعه های باز،بسته است.

۴. اشتراک هر خانواده از مجموعه های بسته ،بسته است.

۸- فرض کنید M یک فضای متریک و A زیرفضایی از آن باشد. در این صورت $C \subseteq A$ در A بسته است اگر و فقط اگر ...

۱. مجموعهٔبسته ای مانند F در M بتوان یافت که $C = A \cap F$

۲. مجموعهٔبسته ای مانند F در M بتوان یافت که $F = A \cap C$

۳. مجموعهٔبسته ای مانند F در M بتوان یافت که $F = A \cup C$

۴. مجموعهٔ فشرده ای مانند K در M بتوان یافت که $C = A \cap K$

۹- در فضای متریک (M, d) کدام گزاره نادرست است؟

۱. اگر $A \subseteq M$ بسته وکراندار انگاه A فشرده است.

۲. اگر F بسته و K فشرده انگاه $F \cap K$ فشرده است.

۳. اگر M فشرده باشد انگاه هر زیرمجموعه نامتناهی E از M دارای یک نقطه انباشتگی در M است.

۴. اگر $A \subseteq M$ فشرده باشد انگاه A بسته است.

۱۰- کدامیک از گزاره های زیر درست است؟

۱. هر مجموعه متناهی فشرده نیست.

۲. $(0,1)$ فشرده نیست.

۳. در (R, d), d متریک معمولی ، Q در R فشرده است.

۴. در (R, d), d متریک معمولی ، R فشرده است.

۱۱- اگر $E = (1,2) \cup \{7\}$ انگاه $\overline{E^\circ}$ عبارتست از

۱. $(1,2) \cup \{7\}$ ۲. $(1,2)$ ۳. $[1,2] \cup \{7\}$ ۴. $[1,2]$

۱۲- کدام عبارت درست است.

۱. اگر A و B همبند باشندانگاه $A \cup B$ همبند است.

۲. اگر A_2 و A_1 همبند باشند و $B, A_1 \subseteq B \subseteq A_2$ همبند است.

۳. اگر A همبند باشد انگاه $\overline{A}$ همبند است.

۴. بازه $[0,1]$ در R_d (R با متریک گسسته)همبند است.

۱۳- فرض کنید f تابعی حقیقی وپیوسته بر فضای متری باشد قرار میدهیم $Z(f)=\{x\in X \mid f(x)=0\}$ در این صورت کدام عبارت در مورد $Z(f)$ درست است؟

۱. نه بسته ونه باز است.
۲. بسته است.
۳. باز است.
۴. هیچکدام

۱۴- اگر f و g پیوسته یکنواخت باشند،کدام تابع پیوسته یکنواخت است؟

۱. $\frac{f}{g}$
۲. $f+g$
۳. $\frac{1}{g}$
۴. fg

۱۵- اگر (X,d_X) و (Y,d_Y) دو فضای متریک و $f:X\to Y$ پیوسته باشد آنگاه کدام گزینه درست است؟

۱. اگر $E\subseteq X$ فشرده انگاه $f(E)$ فشرده است.
۲. f سوپریمم واینفیمم مقادیرخود را در نقطه ای از X می گیرد.
۳. اگر $A\subseteq X$ باز انگاه $f(A)$ باز است.
۴. f^{-1} پیوسته است.

۱۶- اگر $A\subseteq R$ و A مجمو عه ای نافشرده باشد انگاه

۱. هر تابع پیوسته بر A کراندار است.
۲. هر تابع پیوسته وکراندار بر A ماکسیمم دارد.
۳. اگر A کراندار باشد، تابعی پیوسته بر A هست که پیوسته یکنواخت نیست.
۴. هر تابع پیوسته بر A ،می نیمم خود را بر این مجموعه اختیار می کند.

۱۷- اگر $f(x)=\begin{cases}\sin x & x\in Q\\ \cos x & x\notin Q\end{cases}$ تابع f در چه نقاطی پیوسته است؟

۱. $x=2k\pi-\frac{\pi}{4}$
۲. $x=k\pi+\frac{\pi}{4}$
۳. $x=k\pi+\frac{\pi}{6}$
۴. $x=2k\pi+\frac{\pi}{4}$

۱۸– کدامیک از توابع زیر در $x=0$ مشتق پذیر نیست؟

۱. $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0\end{cases}$

۲. $f(x)=\begin{cases} x+2x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0\end{cases}$

۳. $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\in Q \\ 0 & x\notin Q\end{cases}$

۴. $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0\end{cases}$

۱۹– $\lim\limits_{x\to\infty}(۱+۳x)^{\frac{۱}{x}}$ برابر است با:

۱. ∞

۲. e

۳. 1

۴. حد وجود ندارد.

۲۰– فرض کنیم $n\geq 1$ و تابع f دارای مشتق مرتبه n ام وپیوسته بر بازه (a,b) باشد ودر نقطه ای مانند c از (a,b) , $f'(c)=f''(c)=\dots f^{(n-1)}=0$ و $f^{(n)}(c)\neq 0$ در اینصورت

۱. اگر n فرد، انگاه c نقطه مینیمم و ماکسیمم موضعی نیست.

۲. اگر n زوج، انگاه c نقطه مینیمم و ماکسیمم موضعی نیست.

۳. اگر n زوج ،انگاه در حالت $f^{(n)}(c)>0$ تابع f در نقطه c دارای ماکسیمم موضعی است.

۴. اگر n فرد، انگاه در حالت $f^{(n)}(c)<0$ تابع f در نقطه c دارای ماکسیمم موضعی است.

سوالات تشریحی

۱– الف)صورت قضیه (ددکیند)را بیان کنید. ۱،۴۰ نمره

ب)با فرض برقراری قضیه (ددکیند)،نشان دهید اگر L یک زیر مجموعه غیر تهی از اعداد حقیقی واز بالا کراندار باشد،ان گاه L سوپریمم دارد.

۲– فرض کنید سری نامنفی $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ همگرا باشد. نشان دهید سریهای $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ و $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ نیز همگرا هستند. ۱،۴۰ نمره

۳– **الف)**قضیه هاینه-بورل را بیان واثبات کنید. ۱،۴۰ نمره

ب)ثابت کنید $A=\left\{\frac{1}{n}\mid n=1,2,\ldots\right\}\cup\{0\}$ در R فشرده است.

۴– فرض کنید X و Y دو فضای متریک و f تابعی پیوسته از X به Y باشد .ثابت کنید اگر $F\subseteq X$ فشرده باشد، ان گاه $f(F)$ فشرده است. ۱،۴۰ نمره

۵– **الف)**قضیه (میانگین تعمیم یافته):ثابت کنید اگر دو تابع حقیقی مقدار f و g بر $[a,b]$ پیوسته وبر (a,b) مشتق پذیر باشند، ان گاه نقطه ای مانند c وجود دارد به طوری که ۱،۴۰ نمره

$$(f(b)-f(a))g'(c)=g(b)-g(a))f'(c)$$

ب)فرض کنید f به ازای هر $x>0$ تعریف شده ومشتق پذیر باشد و $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$ قرار میدهیم $g(x)=f(x+1)-f(x)$ ثابت کنید $\lim_{x\to\infty} g(x)=0$ (راهنمایی:قضیه مقدار میانگین را به کار ببرید)

شماره سوال	پاسخ صحیح
1	الف
2	ب
3	ب
4	ج
5	د
6	ج
7	د
8	الف
9	الف
10	ب
11	د
12	ج
13	ب
14	ب
15	الف
16	ج
17	ب
18	د
19	ج
20	الف